Алгебраическая геометрия 1 — 18.11.2013, Листок 10

Модули - 2

Модуль M называется *конечно порождённым*, если он порождён конечным числом элементов $m_1, \ldots, m_n$.

Задача 1. a) Покажите, что модуль M конечно порождён $\iff$ существует сюръекция $A^n \to M$.

Пусть $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ – точная последовательность модулей.

b) Если M' и M'' конечно порождены, то и M конечно порождён.

c) Если M конечно порождён, обязательно ли M' и M'' конечно порождены?

d) Модули M и N конечно порождены $\iff$ $M \oplus N$ конечно порождён.

Задача 2. Пусть $f\colon M \to A^n$ – сюръекция и M конечно порождён. Покажите, что $\ker f$ конечно порождён.

Задача 3. Пусть имеется изоморфизм A-модулей $A^n \cong A^m$. Покажите, что $n = m$.

Задача 4 (лемма Накаямы). Пусть A – локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$.

a) Пусть модуль M над A конечно порождён и $\mathfrak{m}M = M$. Покажите, что $M = 0$.

Подсказка: выберите систему порождающих M с минимальным числом элементов и уменьшите его.

b) Пусть $m_1, \ldots, m_n \in M$ – элементы конечно порождённого A-модуля M и их образы $[m_i]$ порождают векторное пространство $M/\mathfrak{m}M$ над полем $A/\mathfrak{m}$. Тогда m_i порождают M.

Напомним, что модуль P *проективный*, если функтор $\mathrm{Hom}(P, -)$ точный. Или иначе, если для любого сюръективного гомоморфизма $M \to M''$ индуцированное отображение $\mathrm{Hom}(P, M) \to \mathrm{Hom}(P, M'')$ сюръективно.

Задача 5. a) Свободные модули проективны.

b) Модуль $M \oplus M'$ проективен $\iff$ M и M' проективны.

c) Если P проективен и $f\colon M \to P$ сюръективен, то $M \cong P \oplus \ker f$.

d) Модуль проективен $\iff$ является прямым слагаемым в свободном модуле.

Задача 6. a) Покажите, что конечно порождённый проективный модуль над локальным кольцом свободен.

Подсказка: возьмите $m_1, \ldots, m_n \in M$, образы которых образуют базис $M/\mathfrak{m}M$ над полем $A/\mathfrak{m}$, и покажите, что заданное ими отображение $A^n \to M$ – изоморфизм.

b) Приведите пример проективного несвободного конечно порождённого модуля (не над локальным кольцом).

Модуль M над кольцом A называется *плоским*, если функтор $M \otimes_A -$ точный.

Задача 7. a) Модуль $M \oplus M'$ плоский $\iff$ M и M' плоские.

b) Кольцо $S^{-1}A$ – плоский A-модуль для любой мультипликативной системы S.

c) Любой проективный модуль плоский.

Задача 8. a) Покажите, что свойство быть плоским локально, т.е. M плоский над A $\iff$ для всех простых идеалов $\mathfrak{p} \subset A$ модуль $M_\mathfrak{p}$ плоский над $A_\mathfrak{p}$ $\iff$ для всех максимальных идеалов $\mathfrak{m} \subset A$ модуль $M_\mathfrak{m}$ плоский над $A_\mathfrak{m}$.

b) Локально ли свойство «быть проективным»?