Об обозначениях. Как обычно, e — элементарные симметрические многочлены ($e_\lambda = e_{\lambda_1} \ldots e_{\lambda_k}$), h — полные симметрические многочлены ($h_\lambda = h_{\lambda_1} \ldots h_{\lambda_k}$), s — многочлены Шура ($s_\lambda = \dfrac{a_{\lambda+\rho}}{a_\rho} = \dfrac{\det(x_i^{\lambda_j+j-1})}{\det(x_i^{j-1})}$).

Везде ниже (особенно в индексах суммирования) λ и μ — произвольные разбиения (aka диаграммы Юнга), α и β — произвольные мультииндексы, σ — произвольная перестановка; вряд ли кого-то смутят обозначения $x^\alpha = \prod x_i^{\alpha_i}$ или то, что количество перменных нигде не указывается.

1. Числа Костки

Хотелось бы связать многочлены Шура с другими, более понятными базисами. Первый шаг в этом направлении уже был сделан на прошлой лекции. А именно, было доказано, что $s_{(k)} = h_k$ и $s_{(1^k)} = e_k$ — и это утверждение получалось применением *формул Пьери*,

$$h_k s_\lambda = \sum_{\mu \in \lambda \otimes k} s_\mu; \quad e_k s_\lambda = \sum_{\mu \in \lambda \otimes 1^k} s_\mu;$$

к $\lambda = \varnothing$.

Применив же формулу Пьери несколько раз, можно выразить через многочлены Шура произвольные полные симметрические многочлены:

$$h_\mu = \sum K_{\lambda\mu} s_\lambda; \quad e_\mu = \sum K_{\lambda\mu} s_{\lambda^*},$$

где $K_{\lambda\mu}$ есть число вхождений диаграммы λ в мультимножество диаграмм $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_k$. Другими словами, $K_{\lambda\mu}$ есть число способов получить диаграмму λ за k шагов, прибавляя на i-м шаге μ_i клеток, никакие две из которых не лежат в одном столбце.

Если писать в каждой клетке диаграммы номер шага, на котором она добавилась, станет видно, что $K_{\lambda\mu}$ — это количество *полустандартных таблиц* формы λ и веса μ (заполнений клеток таблицы λ числами, нестрого возрастающих по строкам и строго возрастающих по столбцам, среди которых μ_i чисел, равных i). Коэффициенты $K_{\lambda\mu}$ называются *числами Костки.*

(Любители доказательств по индукции могут переговорить это в виде доказательства по индукции. Доказательство второй формулы аналогично, но так как в соответствующей формуле Пьери меняются местами роли строк и столбцов, вместо диаграммы λ будет стоять транспонированная диаграмм λ^*.)

Отметим, что из комбинаторного описания не очевидно, что числа Костки зависят только от *разбиения* μ (т. е. не зависят от порядка весов μ_i) — зато это очевидно из их алгебраического смысла: умножение-то коммутативно.

Инволюция меняет местами h_μ и e_μ, поэтому естественно возникает гипотеза:

$$\omega(s_\lambda) \stackrel{?}{=} s_{\lambda^*}.$$

Те, кто решат домашнее задание, ее докажут.

2. Три вычисления произведения Коши

В этом разделе мы вычислим тремя способами произведение $\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}$.

2.1. Определитель Коши. Посмотрим на *определитель Коши* $\det\big((1-x_iy_j)^{-1}\big)$.

С одной стороны, можно записать, что $(1-x_iy_j)^{-1}=\sum_n x_i^l y_j^l$ и раскрыть определитель по определению:

$$\det\big((1-x_iy_j)^{-1}\big)=\sum_{a_{ij}}\sum_{\sigma}\prod_i x_i^{a_{i\sigma(i)}}y_{\sigma(i)}^{a_{i\sigma(i)}};$$

собирая вместе коэффициенты при мономах вида x^λ, получаем

$$\sum_\lambda\sum_{\sigma_1,\sigma_2}x^{\sigma_1(\lambda)}y^{\sigma_2(\lambda_2)}(-1)^{|\sigma_1\sigma_2^{-1}|}=\sum_\lambda\sum_{\sigma_1,\sigma_2}(-1)^{|\sigma_1|}x^{\sigma_1(\lambda)}(-1)^{|\sigma_2|}y^{\sigma_2(\lambda)}=\sum_\lambda a_\lambda(x)a_\lambda(y).$$

С другой стороны, в духе вычисления определителя Вандермонда можно получить, что этот определитель равен

$$\frac{\prod(x_i-x_j)\prod(y-y_j)}{\prod(1-x_iy_j)}.$$

Действительно, если домножить наш определитель на $\prod(1-x_iy_j)$, получится *многочлен*, кососимметричный по иксам и по игрекам — значит, он делится на произведение Вандермондов $\prod(x_i-x_j)\prod(y-y_j)$, причем из соображений степени отношение равно константе; доказательство того, что эта константа равна единице — упражнение.

Приравнивая результаты этих двух вычислений, получаем первую формулу для *произведения Коши*:

$$\prod(1-x_iy_j)^{-1}=\sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y).$$

2.2. Производящая функция $\mathbf{H(x)}$. Как обсуждалось на прошлой лекции,

$$\sum h_n(x)t^n=\prod(1-x_it)^{-1}.$$

Поэтому

$$\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}=\prod_j H_x(y_j)=\prod_j\sum_n h_n(x)y_j^n=\sum_\alpha h_\alpha(x)y^\alpha=\sum_\lambda\sum_\sigma h_\lambda(x)\sigma(y_j^\alpha).$$

то есть

$$\prod(1-x_iy_j)^{-1}=\sum h_\lambda(x)m_\lambda(y).$$

2.3. Формула Якоби–Труди. Последний способ до какой-то степени смешивает предыдущие два. Домножим произведение Коши на определитель Вандермонда — но только по игрекам, — а потом воспользуемся предыдущей формулой:

$$a_\delta(y)\prod(1-x_iy_j)^{-1}=a_\delta(y)\sum h_\lambda(x)m_\lambda(y)=$$
$$=\sum_{\alpha;\,\sigma_1,\sigma_2}(-1)^{|\sigma_1|}y^{\sigma_1(\delta)}h_\alpha(x)y^{\sigma_2(\alpha)}=\sum_{\alpha;\,\sigma_1,\sigma_2}(-1)^{|\sigma_1|}h_\alpha(x)y^{\sigma_1(\delta)+\sigma_2(\alpha)};$$

переходя от α к $\beta = \sigma_2^{-1}\sigma_1(\rho) + \alpha$, получаем

$$\sum_{\beta;\,\sigma_1,\sigma_2} (-1)^{|\sigma_2^{-1}\sigma_1|} h_{\beta-\sigma_2^{-1}\sigma_1(\delta)}(x) \cdot (-1)^{|\sigma_2|}\sigma_2(y^\beta) = \sum_\lambda \left(\sum_\sigma (-1)^{|\sigma|} h_{\lambda-\sigma(\rho)}(x) \right) a_\lambda(y).$$

Таким образом,

$$\prod (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum \det(h_{\lambda_i+j-i}(x)) s_\lambda(y).$$

Сравнивая это выражение с первой формулой для произведения Коши, получаем *формулу Якоби–Труди*,

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i+j-i}).$$

В частности, для $\lambda = (1^k)$ это дает известную формулу $e_k = \det(h_{j-i+1})$, а после применения инволюции получаем парную к ней формулу $h_k = \det(h_{j-i+1})$.

В домашних задачах предлагается еще вывести (эту или) двойственную формулу, $s_{\lambda^*} = \det(e_{\lambda_i-i+j})$, из формулы Пьери. Еще одно, комбинаторное доказательство будет, вероятно, рассказано на одной из следующих лекций.

3. Скалярное произведение и числа Костки еще раз

3.1. Произведение Коши и скалярное произведение. Один из способов думать про формулы для произведения Коши типа тех, что мы видели в прошлом разделе (еще одна формула такого типа есть, кстати, в домашних задачах), следующий. Определим на кольце симметрических функций скалярное произведение условием $\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\mu\nu}$, т. е. тем условием, что m — двойственный к h базис (не путать с инволюцией, которая переводит h, наоборот, в e).

Пусть u_λ и v_μ — два (аддитивных) базиса в симметрических функциях. Тогда $\langle u_\lambda, v_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$ тогда и только тогда, когда $\prod(1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(y)$.

Таким образом, многочлены Шура — это ортонормальный базис в кольце симметрических функций.

3.2. Комбинаторное определение многочленов Шура. Посмотрим еще раз на формулу $h_\mu = \sum K_{\lambda\mu} s_\lambda$. Она говорит, что матрица перехода от базиса s_λ к базису h_μ — это такая матрица из чисел Костки (строки и столбцы этой матрицы занумерованы диаграммами Юнга): $h = Ks$.

Применяя к этому равенству двойственность, получаем, что $s = K^* m$:

$$s_\lambda = \sum_\mu K_{\lambda\mu} m_\mu$$

(отметим, что, в отличие от предыдущей формулы, суммирование идет уже не по λ, а по μ). Другими словами,

$$s_\lambda = \sum_{\mathrm{shape}(T)=\lambda} x^T$$

(суммирование ведется по всем полустандартным таблицам формы λ; x^T соответствующий этой таблице моном — x_i там стоит в такой степени, сколько в таблице стоит чисел i).

Это описание можно считать еще одним, чисто комбинаторным определением многочленов Шура. Его применения к комбинаторике мы, возможно, обсудим позже. Пока можно удовлетвориться тем, что из него хорошо видно, например, что $s_{(k)} = h_k$, а $s_{(1^k)} = e_k$.