

## 4. Геометрия комплексных чисел и кватернионов

**Задача Дня.** *Расслоение Хопфа.* Разбейте пространство, из которого выбросили одну прямую, на попарно зацепленные окружности.

**4.1.** Комплексным числам  $a$  и  $b$  соответствуют векторы  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OB}$ . Выразите скалярное произведение  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  через  $a$  и  $b$  с помощью сложения, умножения и сопряжения.

**4.2.** а) Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, если и только если диагонали четырехугольника перпендикулярны.

б) *Теорема Наполеона.* Если на сторонах произвольного треугольника, как на основаниях, построить во внешнюю сторону правильные треугольники, то их центры образуют правильный треугольник.

**4.3.** а) Композиция поворотов плоскости — поворот или параллельный перенос.

б) Композиция поворотов пространства (с различными осями) — винтовое движение.

**4.4.** а) Дробно-линейным отображением плоскости можно перевести любые три различные точки в любые другие три различные точки, и такое отображение единственно.

б) Дробно-линейным отображением переведите внутренность единичной окружности  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  на верхнюю полуплоскость  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ .

с) Найдите все дробно-линейные отображения верхней полуплоскости на себя.

д) Инверсия сохраняет двойные отношения точек на окружностях или прямых.

е) Кватернионным дробно-линейным отображением можно перевести любые три различные точки в любые другие три различные точки. Единственно ли такое отображение?

ф) Кватернионным дробно-линейным отображением переведите множество  $\{q \in \mathbb{H} : |q| = 1, q \neq 1\}$  в множество  $\{q \in \mathbb{H} : \text{Re } q = 0\}$ .

г) Построенное отображение переводит окружности в окружности или прямые.

h) Для каждого  $q \in \mathbb{H}, |q| = 1$ , множество  $S_q := \{q \cdot (\cos t + i \sin t) : t \in \mathbb{R}\}$  — окружность.

и) Любую пару различных окружностей вида  $S_q$  можно непрерывно продеформировать в любую другую пару, так чтобы в процессе деформации окружности не пересекались.

**4.5.** В скольких точках могут пересекаться две окружности на  $\mathbb{C}P^2$ ?

### Сданные решения

Абрамов 1.1ab, 2.12abd, 3.1ab2a	Акимова 1.12ab4, 2.1	Буря 1.1ab2a3b4a, 2.2a-d, 3.2a
Гацולהва 1.2a	Герасимова 1.1ab2	Гринько 1.1ab23c4ab
Дмитриенко 1.13ac4a, 2.12ab, 3.1ab+.2a	Думанский ЗД I	Елишев 1.1ab2a3c4c, 2.1
Елшин 1.1ab3c	Ерошенко 1.1-1.4	Жукова 1.1a $\frac{1}{2}$ b $\pm$
Замятин 1.123ac4bc 2.12a-d	Измаилов 1abc $\pm$ 2a34abc $\pm$	Ильин 1.12b3ab, 2.12ab
Каратушин 1.1a $\frac{1}{2}$	Карпушкин 1.1abc+.3c	Кельвич 1.1
Киселёв 1.1ab234a5ab, 2.12a-d34a, 3.2a	Коваленко 1.2b, 2.12a-c34ab, 3.2a	Королев 1.1ab
Краснов 1.1ab2a4c, 3.2a	Кравцов 1.1bc $\pm$ 2a3a $\pm$ c $\pm$ 4ab $\pm$ c $\pm$ 5a	Круль 1.12ab34a, 2.12a-f, 3.12a
Лагуновская 1.1a $\mp$ b, 2.34ab	Литвинов 1.1a $\Rightarrow$ b2a	Лященко 1.1ab, 2.12a-c
Малахов 1.1ab3c, 2.12abd	Маслов 1.1ab2, 2.1	Матушкин 1.12a4, 2.2a-e34
Мещихин 1.2a3c	Михайлов 1.1ab2a $\pm$ b $\mp$ 3b4b $\mp$ , 2.12ab, 3.12a	Молоков 1.4c $\pm$ , 2.2.a $\pm$ c $\pm$ d $\pm$ ef $\pm$ , ЗДIII
Неугодов 1.1ab3c4a	Никитин 1.1ab, 3.1b	Новак 1.1a $\Rightarrow$ b, 3.2ab $\pm$
Пашментов 1.1ab	Райко 1.1ab234ab $\pm$ c, 2.12a-d34a	Сангаджиев (?) 1.1ab
Сеилов 1.1c	Трифонов 1.1abc $\pm$ 23ac4a, 2.1	Федоров 1.4c
Халайджи Саша 1.1a2b	Халайджи Леша 1.2b	Хачатурян 1.1ab
Худяков 1.1ab	Шайдуров 1.12a3ac4c, 3.3c	Шарипова 1.123ac4, 2.12a-e34a, 3.3c
Шевцов 1.1a2a $\pm$ b3a $\pm$ c $\pm$	Шлыков 1.1ab	Шуклин 1.1ab2a