Листок 4. 30 октября 2013

Задача 1. Пусть размерность i-го пространства конечномерного комплекса над полем равна m_i, размерность i-го пространства гомологий равна b_i. Пусть пространства комплекса с отрицательными индексами и индексами больше n — нулевые. Докажите, что числа m_i, b_i удовлетворяют неравенствам Морса:

$$m_i - m_{i-1} + ... \geq b_i - b_{i-1} + ...$$

при $0 \leq i \leq n$ и равенству $m_n - m_{n-1} + ... = b_n - b_{n-1} + ...$

Задача 2. Рассмотрим в евклидовом пространстве V^n со скалярным произведением $\langle , \rangle$ самосопряженный оператор A. Обозначим через f_A ограничение квадратичной формы $\langle Ax, x \rangle$ на сферу S единичного радиуса в V. Докажите, что точка v этой сферы является критической точкой функции f_A если и только если v – собственный вектор оператора A. Докажите теорему о приведении квадратичной формы к главным осям ортогональным преобразованием.

Задача 3. Докажите, что точка v невырожденная точка функции f_A из предыдущей задачи если и только если соответствующее ей собственное число однократно.

Задача 4. Пусть $\lambda_1 \leq \lambda_2 ... \leq \lambda_n$ – собственные числа самосопряженного оператора A. Вычислите гомологии множества меньших значений $\{x | f_A(x) \leq c\}$ для произвольного c.

Задача 5. Обозначим через g_A функцию на проективизации пространства V, прообраз которой при естественной проекции совпадает с f_A. Пусть $\lambda_1 \leq \lambda_2 ... \leq \lambda_n$ – собственные числа самосопряженного оператора A. Вычислите гомологии (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$) множества меньших значений $\{x | g_A(x) \leq c\}$ для произвольного c.

Задача 6. Докажите, что эйлерова характеристика замкнутого нечетномерного многообразия равна нулю.

Задача 7. Рассмотрим функцию $f(z) \mapsto Re(z^k)$ на комплексной прямой. При каких k она морсовская? Вычислите гомологии пары $(\{z | f(z) \leq \varepsilon\}, \{z | f(z) \leq -\varepsilon\})$.

Задача 8. Постройте на сфере с произвольным числом ручек функцию с тремя критическими точками.

Задача 9. Рассмотрим клеточное разбиение Шуберта многообразия $G(3,6)$ трехмерных линейных подпространств в шестимерном пространстве. Выясните, в каком случае замыкание одной клетки пересекается с другой клеткой.

Задача 10. Вычислите гомологии $H_*(G(3,6), \mathbb{Z}_2)$.