Симметрические функции

А3◇1. Сумма двух из комплексных корней многочлена $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$ равна 1. Найдите λ.

А3◇2. Найдите все комплексные решения системы уравнений

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\,, \quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 24\,.$$

А3◇3. Выразите через элементарные симметрические многочлены e_i функции:

а) $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$ **б)** $\sum\limits_{i\neq j\neq k\neq i} x_i(x_j + x_k)$ **в)** $\sum\limits_{i\neq j} x_i^2 x_j$

г) $(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_4)(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_1 + x_4)$

А3◇4. Выразите дискриминант[1] D_f кубического трёхчлена $f = x^3 + px + q$ через p и q.

А3◇5. Пусть в зад. А3◇4 $p, q \in \mathbb{R}$. Покажите, что при $D_f < 0$ у f есть ровно один вещественный корень, а при $D_f > 0$ — ровно три, и в этом случае уравнение $f = 0$ перескалированием переменной приводится к виду $4t^3 - 3t = a$ и решается в тригонометрических функциях.

А3◇6. Найдите все $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых многочлен $x^4 - 4x + \lambda$ имеет кратный корень.

А3◇7 (циркулянт). Выразите определитель матрицы, строки которой являются последовательными циклическими перестановками строки $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, через значения полинома $f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n$ на комплексных корнях n-той степени из единицы.

А3◇8. Вычислите дискриминант n-того кругового многочлена[2] $\Phi_n(x)$. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для всех $n = 3, 4, 5, 6, 7$.

А3◇9. Многочлен $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ имеет корни $x_1, x_2, \dots, x_n$. Всякий ли симметрический многочлен от $x_2, \dots, x_n$ переписывается в виде многочлена от x_1?

А3◇10. Обозначим через $\zeta \in \mathbb{C}$ какой-нибудь первообразный корень m-той степени из единицы.

а) Для каждого $a \in \mathbb{C}$ раскройте скобки и приведите подобные в $\prod\limits_{\nu=1}^{m}(a - \zeta^{\nu-1}x)$.

б) Покажите, что $\forall f \in \mathbb{C}[x]\ \exists h \in \mathbb{C}[x]$: $\prod\limits_{\nu=1}^{m} f(\zeta^{\nu-1}x) = h(x^m)$.

в) Выразите корни многочлена h через корни многочлена f.

А3◇11. Найдите в $\mathbb{C}[x]$ многочлен 4-й степени, корнями которого являются

а) квадраты всех комплексных корней многочлена $x^4 + 2x^3 - x + 3$

б) кубы всех комплексных корней многочлена $x^4 - x - 1$.

А3◇12. Выразите **а)** $s_{(1^n)}$ через e_ν **б)** $s_{(n)}$ через h_ν.

А3◇13. Представьте **а)** $s_{(1)}^2$ **б)** $s_{(1,1)} \cdot s_{(2)}$ в виде целочисленных линейных комбинаций многочленов s_λ.

А3◇14*. Докажите, что $e^{F\otimes E + E\otimes F} = e^F \otimes e^F$ в $\mathrm{Mat}_{n^2}(\mathbb{C})$, где F — любая, а E — единичная комплексные матрицы размера $n \times n$.

А3◇15*. Покажите, что в кольце формальных степенных рядов с рациональными коэффициентами от матричных элементов $n \times n$ матрицы A выполняется равенство $\ln\det(E - A) = \operatorname{tr}\ln(E - A)$, а для всех достаточно малых комплексных матриц A оно выполняется и численно.

---

[1] *дискриминантом* приведённого многочлена $f(x) = \prod(x - x_i)$ степени n называется произведение $\binom{n}{2}$ квадратов разностей его корней $D_f = \Delta_\delta^2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)^2$, выраженное через коэффициенты многочлена f

[2] *n-тым круговым многочленом* называется приведённый многочлен степени $\varphi(n)$, корнями которого являются все примитивные комплексные корни степени n из единицы

Персональный табель ____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 3 (2 октября 2014)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3а			
б			
в			
г			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10а			
б			
в			
11а			
б			
12а			
б			
13а			
б			
14			
15			