

Исчисление массивов, таблиц и диаграмм

A4◊1. Покажите, что следующие три условия на массив a попарно эквивалентны:

- а) строчная развёртка a является таблицей Юнга б) a плотен вниз
- в) $a(1, j + 1) + a(2, j + 1) + \dots + a(i, j + 1) \leq a(1, j) + a(2, j) + \dots + a(i - 1, j) \forall i \in I, j \in J$.

A4◊2. Нарисуйте плотный вниз массив со строчной развёрткой

1	4	6
2	5	7
3	8	9

 и плотный влево массив

со столбцовой развёрткой

1	2	3
4	5	8
6	7	9

. Какой перестановке из симметрической группы S_9 отвечает по теореме о биекции эта пара массивов?

A4◊3. Каким перестановкам $g \in S_9$ соответствует по теореме о биекции пара таблиц²

- а)

1	2	3	6	7	8	9
4						
5						

 и

1	4	5	6	7	8	9
2						
3						
- б)

1	3	5	6
2	4	9	
7	8		

 и

1	3	5	7
2	4	8	
6	9		

A4◊4. Покажите, что всякий гомоморфизм³ между двумя DU-орбитами либо биективен, либо вторая орбита состоит из одной точки.

A4◊5. Выпишите явно многочлены Шура а) $s_{2,1}(x_1, x_2, x_3)$ б) $s_{3,1}(x_1, x_2, x_3)$ в) $s_{2,1,1}(x_1, x_2, x_3)$.

A4◊6. Из скольких мономов состоит $s_{(2,1,1)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$?

A4◊7. Выразите $\det \begin{pmatrix} x_1^6 & x_2^6 & x_3^6 & x_4^6 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ через элементарные симметрические многочлены и произведение $\prod_{i < j} (x_i - x_j)$.

A4◊8 (доминирование). Для двух диаграмм Юнга λ и μ одинакового веса $|\lambda| = |\mu| = n$ мы пишем $\lambda \succeq \mu$, если $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j \geq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_j \forall j$. Покажите, что если $\lambda \triangleright \mu$ это наименьшая из доминирующих μ диаграмм, то μ получается из λ переносом ровно одной клетки в юго-западном направлении на ближайшее возможное расстояние, и в этом случае $\mu^t \triangleright \lambda^t$. Выведите отсюда, что для любых диаграмм $\lambda \succeq \mu \iff \lambda^t \preceq \mu^t$.

A4◊9. Разрежем диаграмму λ в объединение Γ -образных диаграмм $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ с углами на главной диагонали, как, например

 =

 \cup

 \cup

. В общем случае k — это число клеток на главной диагонали λ и $\gamma_i = (\lambda_i - i + 1, 1^{\lambda_i - i})$. Выясните, с каим коэффициентом входит s_λ в разложение произведения $s_{\gamma_1} s_{\gamma_2} \dots s_{\gamma_k}$ по базису Шура.

A4◊10* (инволюция Шютценберже). Покажите, что центральная симметрия не меняет форму⁴ $n \times m$ -массива: $\Phi(a^*) = \Phi(a)$ для $a^*(i, j) = a(n + 1 - i, m + 1 - j)$.

¹напомним, что столбцовая развёртка массива a — это строчная развёртка транспонированного массива a^t
²первая таблица есть строчная развёртка уплотнения вниз, вторая — столбцовая развёртка уплотнения влево, а перестановка задаёт отображение из горизонтальных номеров в вертикальные
³т. е. отображение, перестановочное с действием всех операций D_j и U_j
⁴напомню, что форма массива это диаграмма Юнга, описывающая его биуплотнение

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
2			
3а			
б			
4			
5а			
б			
в			
6			
7			
8			
9			
10			