

Маленькие линейные представления

- A5◊1. Постройте приводимое неразложимое представление аддитивной группы \mathbb{Z} .
- A5◊2. Опишите все ассоциативные \mathbb{R} -подалгебры с единицей размерности > 31 в $\text{Mat}_{6 \times 6}(\mathbb{R})$.
- A5◊3. Пусть конечная группа G действует на $V = \mathbb{C}^n$ перестановками базисных векторов. Как связано значение характера¹ $\chi_V(g)$ с числом неподвижных точек перестановки g ?
- A5◊4. Выразите через характеры χ_U и χ_W представлений U и W конечной группы G характер представления а) $U \oplus W$ б) $U \otimes W$ в) U^* г) $\text{Hom}(U, W)$ и покажите, что д) $\chi_{S^2 U}(g) = (\chi_U^2(g) + \chi_U(g^2))/2$ е) $\chi_{\Lambda^2 U}(g) = (\chi_U^2(g) - \chi_U(g^2))/2$. Вычислите ж) $\chi_{\Lambda^2 V}$ з) $\chi_{S^2 V}$.
- A5◊5. Для произвольного линейного представления группы треугольника S_3 выясните, какими могут быть собственные значения входящих в эту группу операторов и как действует оператор, представляющий симметрию треугольника, на собственных подпространствах оператора, представляющего поворот.
- A5◊6. Перечислите все неприводимые представления группы S_3 и найдите их характеры.
- A5◊7. Пусть V — двумерное неприводимое представление группы S_3 .
 а) Верно ли, что $S^{n+6}(V) = S^n(V) \oplus R$, где R — это регулярное представление?
 б) Опишите разложение всех $S^n(V)$ в сумму неприводимых представлений.
 в) Опишите алгебру S_3 -инвариантных полиномов на V .
 г) Вычислите характеры всех $V^{\otimes n}$ и разложите их на неприводимые.
 д) Покажите, что $S^2(S^3(V)) \simeq S^3(S^2(V))$ е) Изоморфны ли $S^k(S^m(V))$ и $S^m(S^k(V)) \forall k, m$?
- A5◊8. Опишите все неприводимые представления группы диэдра D_n и их характеры.
- A5◊9. Вычислите характеры представлений симметрической группы S_4 : тривиального, знакового, 2-мерного через эпиморфизм на группу треугольника и двух 3-мерных — собственной группой куба и несобственной группой тетраэдра. Есть ли среди них приводимые? А изоморфные? Опишите все неприводимые представления S_4 и выясните как они раскладываются на неприводимые представления $S_3 \subset S_4$, вложенной в как стабилизатор 4-го элемента.
- A5◊10. Опишите все неприводимые представления знакопеременной группы A_4 , вычислите их характеры и выясните, как неприводимые представления S_4 раскладываются на неприводимые при ограничении на A_4 .
- A5◊11. Разложите в сумму неприводимых представление собственной группы куба в пространстве \mathbb{C} -значных функций на множестве его а) вершин б) рёбер в) граней.
- A5◊12. На гранях куба написали числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, как на игральной кости. За один ход каждое из них заменяют на среднее арифметическое чисел, стоящих на четырёх соседних гранях. Вычислите с точностью до второго знака после запятой, что будет написано на гранях после 2006 ходов. Изменится ли ответ, если числа расставить на гранях по-другому?
- A5◊13. Найдите размерности, вычислите характеры и разложите на приводимые следующие представления симметрической группы S_5 : а) тривиальное U , знаковое U' , симплициальное V , $V' = V \otimes U'$, $\Lambda^2 V$ и $S^2 V$ б) представление W в функциях на $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5)$ с нулевой суммой значений, заданное посредством изоморфизма $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq S_5$, и $W' = W \otimes U'$ в) $S^2 W$, $\Lambda^2 W$ и $V \otimes W$.
- A5◊14. Опишите все неприводимые представления группы икосаэдра A_5 , вычислите их характеры и выясните, как раскладываются ограничения на A_5 неприводимых представлений S_5 .
- A5◊15. а) б) в) Решите аналог зад. A5◊11 для икосаэдра.
- A5◊16. Составьте таблицы неприводимых характеров группы: а) кватернионных единиц б) $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ в) группы Гейзенберга $H(\mathbb{F}_3) \subset \text{SL}_3(\mathbb{F}_3)$ верхних унитарных матриц.

¹характером линейного представления $\rho : M \rightarrow \text{End}(V)$ множества операторов M в конечномерном векторном пространстве V над полем \mathbb{k} называется функция $M \rightarrow \mathbb{k}$, $g \mapsto \text{tr } \rho(g)$

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
з			
5			
6			
7а			
б			
в			
г			
д			
е			
8			
9			
10			
11а			
б			
в			
12			
13а			
б			
в			
14			
15а			
б			
в			
16а			
б			
в			