Листок 9.
Производная и формула Тейлора.

Пусть f определена в окрестности точки a. Говорят, что f дифференцируема в точке a, если существует конечный предел $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, который называют производной функции f и обозначают через $f'(a)$.

Задача 1. Докажите, что f дифференцируема в точке a тогда и только тогда, когда

$$f(a+h)-f(a)=Ah+\alpha(a,h)h, \quad \lim_{h\to 0}\alpha(a,h)=0.$$

Линейную функцию $h\mapsto Ah$ называют дифференциалом функции f в точке a.

Задача 2. Найдите $f'(-1)$, где $f(x)=(x+1)(x+2)\dots(x+250)$.

Задача 3. Приведите пример функции, непрерывной только в одной точке, и при этом дифференцируемой в этой точке.

Задача 4. (Пример Вейерштрасса) Докажите, что функция $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\sin(8^n x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, но нигде не дифференцируема.

Задача 5. Пусть $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ — дифференцируемая функция. Верно ли, что функция $f'(x)$ непрерывна на $[a,b]$? Верно ли, что функция $f'(x)$ принимает все возможные значения между $f'(a)$ и $f'(b)$?

Задача 6. Покажите, что $f'(x)$ может иметь разрывы только второго рода.

Задача 7. Существует ли дифференцируемая функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, производная которой разрывна в каждой точке?

Задача 8. (Теоремы Ролля и Лагранжа)

(a) Пусть f непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b) и $f(a)=f(b)$. Докажите, что найдется $c\in(a,b)$ такая, что $f'(c)=0$.

(b) Пусть f – n раз непрерывно дифференцируема на (a,b). Докажите, что если f обращается в ноль в $(n+1)$ -й точке этого интервала, то найдется такая точка $c\in(a,b)$, в которой $f^{(n)}(c)=0$.

(c) Пусть f непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Докажите, что найдется $c\in(a,b)$ такая, что $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

(d) Пусть $f(x)=x\sin(\ln x)$ при $x>0$ и $f(0)=0$. Пусть функция $c(x)\in(0,1)$ такова, что $f(x)-f(0)=xf'(c(x))$. Докажите, что $c(x)$ разрывна в любом сколь угодно малом интервале $(0,\delta)$, $\delta>0$.

Задача 9. Пусть f – непрерывна на $[a,b]$ и $f'(x)=0$ для всех x кроме не более чем счетного множества. Докажите, что $f=const$.

Задача 10. Пусть f бесконечное число раз дифференцируема в каждой точке $\mathbb{R}$ и $\forall x$ $\exists n_x\colon f^{(n_x)}(x)=0$. Докажите, что f – многочлен.

Задача 11. Что больше: e^{π} или π^{e} ?

Задача 12. Зафиксируем число $\Delta x>0$ и определим индуктивно конечные разности функции $f(x)$ по формулам

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x), \qquad \Delta^{(n)}f(x)=\Delta(\Delta^{n-1}f(x)).$$

Докажите, что если функция $f(x)$ n-раз дифференцируема в точке x_0, то выполнено

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta^{(n)}f(x)}{(\Delta x)^n}.$$

Задача 13.(Формула Тейлора с остаточным членов в форме Лагранжа) Пусть функция f n раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и $(n+1)$ раз дифференцируема на интервале (a,b). Докажите, что найдется точка $c\in(a,b)$ такая, что

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)(b-a)^n}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)}{(n+1)!}.$$

Задача 14. Пусть f_n – дифференцируемы на интервале (a,b) и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно на (a,b), а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится хотя бы одной точке. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно к дифференцируемой функции и верно равенство:

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Задача 15. Докажите, что степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ задает на круге сходимости бесконечно дифференцируемую функцию f, причем $n!c_n = f^n(0)$.

Задача 16. Для произвольной последовательности $\{a_k\}$ докажите, что существует бесконечно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая что $f^{(k)}(0) = a_k$.

Задача 17. Докажите, что функция $f(x) = e^{-1/x^2}$ при $x > 0$ и $f(x) = 0$ при $x \leq 0$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$.

Задача 18. Пусть $f \in C^{\infty}(-1,1)$, f отлична от нуля в любой проколотой окрестности $x = 0$ и $f^{(k)}(0) = 0$ для всякого $k \geq 0$. Докажите, что $\sup_{k,x} |f^{(k)}(x)| = +\infty$.

Задача 19. Докажите, что для любого замкнутого множества F существует бесконечно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, принимающая значение 0 в точках F и только в них.

Задача 20. Пусть f – непрерывно дифференцируемая функция на $[0,+\infty)$ и $f(0) = 1$. Вычислите предел $\lim_{n\to\infty}(f(\frac{t}{n}))^n$ для всякого $t \geq 0$.

Задача 21. Найдите значение предела

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(shx) - sh(\sin x)}{x^7}.$$

Задача 22. Пусть $x = x(t)$ — корень уравнения $x^5 + x = t$. Найдите первые три члена разложения функции $x(t)$ в точке $t = 0$.

Задача 23. Найдите первые три члена асимптотики n-ого корня уравнения $tg(x) = x$.

Задача 24. Определим последовательность рациональных чисел $\{B_k\}$ следующим разложением в ряд Тейлора:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n, \qquad |x| < 1.$$

a) Докажите, что $B_k = 0$ для нечетных $k \geq 3$.

b) Докажите, что

$$B_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k+1} B_{n-k}.$$

c) Докажите, что

$$tg(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |B_{2n}| \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} x^{2n-1}, \qquad |x| < \pi/2.$$

d) Докажите, что

$$\sum_{n=1}^{N-1} n^k = \frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^{k} \binom{k+1}{s} B_s N^{k+1-s}.$$

Задача 25. (a) К реке шириной a построен под прямым углом канал шириной b. Какой максимальной длины суда могут входить в этот канал?

(b) Четыре букашки, сидевшие в вершинах единичного квадрата, стали двигаться друг за другом с единичной скоростью, держа курс на преследуемого. Найдите траектории их движения.

(c) Чашку цилиндрической формы с чаем вращают вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω. Найдите форму поверхности чая.