Листок 1.

Индукция

Задача 1. Докажите неравенство Бернулли
$$(1+x)^n \geq 1+nx,$$
где n – натуральное число и $x \geq -1$.

Задача 2. На какое число частей делят плоскость n прямых в общем положении (любые две прямые пересекаются и никакие три не пересекаются в одной точке)?

Задача 3. На какое число частей делят плоскость n окружностей в общем положении (любые две окружности пересекаются по двум точкам и никакие три не пересекаются в одной точке)? Объясните почему не существует диаграмм Эйлера-Венна для четырех и более множеств.

Задача 4. Объясните парадокс неожиданной казни. Однажды в воскресенье начальник тюрьмы вызвал математика, приговоренного к казни, и сообщил ему: «Вас казнят на следующей неделе в полдень, однако это станет для вас неожиданностью». Математик подумал над его словами и улыбнулся: «В воскресенье меня казнить не могут! Ведь тогда уже в субботу вечером я буду знать об этом. Следовательно, последний возможный день моей казни — суббота. Но если меня не казнят в пятницу, то я буду заранее знать, что меня казнят в субботу, значит, и её можно исключить». Последовательно исключив пятницу, четверг, среду, вторник и понедельник, преступник пришёл к выводу, что казни не будет. На следующей неделе палач постучал в его дверь в полдень в среду — это было для него полной неожиданностью. Где ошибка в рассуждении математика?

Аксиома индукции: если множество $M \subset \mathbb{N}$ таково, что
$1 \in M$ и $n \in M \Longrightarrow (n+1) \in M$ для всякого n, то $M = \mathbb{N}$.

Задача 5. Докажите, что аксиома индукции эквивалентна следующему утверждению: если множество $M \subset \mathbb{N}$ таково, что $\{1, 2, \ldots, n-1\} \in M \Longrightarrow n \in M$ для всякого натурального n, то $M = \mathbb{N}$.

Задача 6. Докажите, что аксиома индукции эквивалентна следующему утверждению: в каждом непустом подмножестве множества натуральных чисел есть наименьший элемент.

Отношение порядка

Задача 7. Шеренга новобранцев стоит перед старшиной. Старшина командует: налево! Некоторые новобранцы поворачиваются налево, а некоторые – направо. После этого, каждую секунду происходит следующее: если солдаты оказались лицом друг к другу, то они поворачиваются кругом. Докажите, что рано или поздно повороты закончатся.

Задача 8. Могут ли отличаться друг от друга наибольший и максимальный элементы частично упорядоченного множества?

Задача 9. Сколько существует различных линейных порядков на множестве из n элементов?

Задача 10. Докажите, что всякий частичный порядок на конечном множестве можно продолжить до линейного порядка.

Задача 11. Укажите какой-нибудь линейный порядок на множестве векторов плоскости согласованный с операциями сложения векторов и умножения их на скаляр.

Линейно упорядоченное множество, в котором любое непустое подмножество имеет минимальный элемент, называется вполне упорядоченным.

Задача 12. Пусть множество A линейно упорядоченно. Докажите, что следующие утверждения равносильны:

(i) A вполне упорядоченное множество,

(ii) в A нет бесконечных убывающих последовательностей элементов,

(iii) в A выполняется аксиома индукции: если подмножество $B \subset A$ таково, что для всякого $x \in A$ верна импликация $\{y \in A \colon y < x\} \subset B \Longrightarrow x \in B$, то $B = A$.

Задача 13. Пусть A и B вполне упорядоченные множества. Зададим на $A \times B$ порядок следующим образом:

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Longleftrightarrow a_1 < a_2 \,\text{или}\, a_1 = a_2, b_1 \leq b_2.$$

Докажите, что $A \times B$ – вполне упорядоченное множество.

Задача 14. Дана конечная последовательность из нулей и единиц. За один шаг разрешается сделать следующее: найти выражение 01 и заменить его выражением на $10000\ldots0$, причем каждый раз можно написать произвольное конечное число нулей. Докажите, что такую замену можно будет сделать лишь конечное число раз.

Отношение эквивалентности

Задача 15. Докажите, что если некоторое множество A разбито на непересекающиеся подмножества, то отношение "лежать в одном подмножестве" является отношением эквивалентности; всякое отношение эквивалентности можно так задать.

Задача 16. Сколько различных отношений эквивалентности можно задать на множестве из 5 элементов?

Задача 17. Докажите, что следующие отношения являются отношениями эквивалентности: (а) множество прямых на плоскости; эквивалентны параллельные прямые; (Проективная прямая: фиксируем какую-нибудь прямую l на плоскости; каждому классу эквивалентности (кроме класса l) можно сопоставить точку (укажите как именно) на l, классу эквивалентности, соответствующему l, сопоставим бесконечно удаленную точку)

(б) множество замкнутых непрерывных кривых (петель) в некоторой области D плоскости, проходящих через фиксированную точку этой области; две кривые эквивалентны, если одну из них можно непрерывной деформацией в области D (можно гнуть и растягивать как резинку, но нельзя рвать) преобразовать в другую;

(найдите классы эквивалентности для случая, когда $1)^*$ D – вся плоскость, $2)^{**}$ D – плоскость без некоторой точки; множество классов эквивалентности называют группой гомотопий D)

(в) (m – натуральное число) множество целых чисел; два числа эквивалентны, если имеют одинаковый остаток при делении на m; (классы эквивалентностей называются в этом случае классами вычетов по модулю m)

(г) множество $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$; две пары (n, m) и (p, q) эквивалентны, если $nq = mp$.

Множество классов эквивалентности в (г) называется множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Задача 18. Докажите, что на $\mathbb{Q}$ корректно определены (т. е. не зависят от представителей) операции сложения, умножения и отношение порядка:

$$(n, m)+(p, q) = (nq+mp, mq), \quad (n, m)\cdot(p, q) = (np, mq), \quad (n, m) \leq (p, q) \Longleftrightarrow nq \leq mp.$$

Задача 19. Докажите, что на $\mathbb{Q}$ выполняется аксиома Архимеда: натуральный ряд (т. е. дроби вида (n, 1), где n – натуральное число) неограничен сверху. Покажите, что на множестве рациональных функций (функции вида $\frac{P}{Q}$, где P, Q – многочлены) с отношением порядка: $\frac{P}{Q} = \frac{a_m x^m + \ldots a_1 x + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0} \succ 0 \Longleftrightarrow \frac{a_m}{b_n} > 0$, аксиома Архимеда не выполняется.

Задача 20. Существует ли строго возрастающая биекция $\mathbb{Q}$ на множество целых чисел $\mathbb{Z}$?

Задача 21. Докажите, что следующие числа не являются рациональными:

(a) $\sqrt{5}$, (b) $\sqrt{5} + \sqrt{7}$, (c) $\cos 20°$.