

*Задача 1.* Нарисуйте на плоскости с координатами  $(x, y)$  множество точек, удовлетворяющих условию  $f(x, y) = c$ .

а)  $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2, c = -1, 0, 1;$

б)  $f(x, y) = x^2 + xy - 2y^2, c = -1, 0, 1;$

в)  $f(x, y) = x^3 + y^2, c = -1, 0, 1;$

г)  $f(x, y) = x^3 - 3x - y^2, c = -3, -2, -1, 1, 2, 3;$

*Задача 2.* Докажите, что внутренности квадрата, круга и полукруга на плоскости попарно диффеоморфны.

*Задача 3.* Рассмотрим отображение плоскости в плоскость:

$$y_1 = x_1^2 - x_2^2 + 2x_1, \quad y_2 = 2x_1x_2 - 2x_2.$$

а) Найдите множество критических точек этого отображения и нарисуйте ядра дифференциала в критических точках.

б) Найдите множество критических значений этого отображения.

*Задача 4.* Рассмотрим отображение произведения, сопоставляющее многочленам  $f(x) = x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \dots + a_0$  и  $g(x) = x^q + b_{q-1}x^{q-1} + \dots + b_0$  их произведение. Определенное так отображение можно рассматривать как отображение из  $\mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  в себя.

а) Найдите матрицу Якоби этого отображения.

б) опишите многочлены  $f, g$ , в которых это отображение является локальным диффеоморфизмом.

в) Докажите, что это отображение собственное, то есть прообраз компакта - компакт.

*Задача 5.* Введите структуру многообразия на сфере  $S^n$ , проективных пространствах  $\mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n$  и торе  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ .

*Задача 6.* Докажите, что пространство квадратных матриц с положительным определителем линейно связно.