Анализ на многообразиях. Листок 3. 24 сентября 2014

Задача 1. Рассмотрим вещественный многочлен $P_a(x) = x^3 + ax - 1$. Докажите, что найдется гладкая функция φ параметра a, определенная при достаточно малых a, такая что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(a)$ – корень P_a. Вычислите $\varphi'(0)$ и $\varphi''(0)$.

Задача 2. Пусть гладкая функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ определена в некоторой окрестности точки $0 \in \mathbb{R}^n$ и ноль является морсовской критической точкой функции f, $g\colon U \to R$ гладкая функция.
а) Докажите, что найдется такая окрестность $V \subset U$ точки ноль, при достаточно малом значении параметра ε функция $f + \varepsilon g$ имеет в V единственную критическую точку $x(\varepsilon)$. б) Докажите, что при достаточно малых значениях параметра ε – $x(\varepsilon)$ гладко зависит от ε.
б) Вычислите $\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}(f(x(\varepsilon)) + \epsilon g(x(\varepsilon)))$.

Задача 3. Рассмотрим отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданное частными производными функции f. Докажите, что морсовские критические точки функции f взаимно-однозначно соответствуют трансверсальным пересечениям графика этого отображения и графика нулевого отображения (переводящего все точки в ноль).

Задача 4. Пусть f гладкая функция на $\mathbb{R}^n$. Докажите, что найдется такая линейная функция l, что $f + l$ – морсовская функция.

Задача 5. Пусть M^k – гладкое подмногообразие в R^N. а) Докажите, что множество состоящее из пар (x, v), где $x \in M$, v – вектор длины один, перпендикулярный M является гладким многообразием, найдите его размерность.
б) Рассмотрим проекцию построенного многообразия X в S^{N-1}, $(x, v) \mapsto v$. Докажите, что ограничение функции $\langle v, . \rangle$ ($v \in S^{N-1}$) на M является морсовской функцией если и только если v регулярное значение этой проекции.

Задача 6. Пусть A – симметрический оператор на $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим квадратичную форму $\langle Ax, x \rangle$. Пусть v критическая точка ограничения этой квадратичной формы на сферу. Докажите, что v - собственный вектор оператора A.

Задача 7. Выясните, при каких условиях на A критические точки из прошлой задачи - морсовские.

Задача 8. Рассмотрим (зависящую от параметра ε) кривую $x^2 + y^2 + \varepsilon(x^4 + 2y^4) = 1$ на плоскости с евклидовыми координатами (x, y). Докажите, что эта кривая является подмногообразием при всех положительных ε. Вычислите производную площади фигуры, ограниченной этой кривой, по ε при $\varepsilon = 0$.