

Задача 1. Пусть a, b внешние формы степени k, l соответственно. Докажите, что

$$i_v(a \wedge b) = i_v(a) \wedge b + (-1)^k a \wedge i_v(b).$$

Задача 2. Пусть a ненулевая внешняя 1-форма, b - внешняя форма степени k . Верно ли, что если $a \wedge b = 0$, то $b = a \wedge c$ для подходящей $(k - 1)$ -формы c ?

Задача 3. Рассмотрим гладкое отображение $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Докажите, что оно является локальным диффеоморфизмом, если и только если форма $F^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$ отлична от нуля в каждой точке.

Задача 4. Рассмотрим отображение многообразия M в \mathbb{R}^n , заданное набором из n функций f_1, \dots, f_n на M : $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Пусть 1-формы df_1, \dots, df_n линейно независимы в каждой точке $F^{-1}(0)$. Верно ли, что $F^{-1}(0)$ является многообразием?

Задача 5. Найдите все инвариантные относительно всех отражений относительно проходящих через ноль прямых дифференциальные 1-формы с постоянными коэффициентами на плоскости.

Задача 6. Пусть f гладкая функция на \mathbb{R}^n . Вычислите $i_v(\omega)$ и $L_v(\omega)$ для формы $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ и векторного поля $v = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Задача 7. Рассмотрим форму $i_v(\omega)$ из предыдущей задачи для $f(x_1, \dots, x_n) = 1/2 \sum x_i^2$. Докажите, что ее ограничение на сферу S^{n-1} , заданную уравнением $\sum x_i^2 = a$ ($a > 0$), не равно нулю ни в какой точке этой сферы. Вычислите $i_v(\omega)$ в какой-нибудь стереографической карте сферы при $n = 2, 3$.

Задача 8. Опишите множество точек плоскости, до которых можно добраться из точки $(1, 0)$ двигаясь вдоль гладких путей $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих условию $\alpha(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t)) > 0$ при всех $t \in [0, 1]$ при $\alpha = xdy$, $\alpha = xdx + ydy$ и $\alpha = ydx - xdy$.

Задача 9. Дифференциальная 1-форма на плоскости совпадает в окрестности бесконечности с формой $xdy - ydx$. Может ли она нигде не обращаться в ноль?