# Задачи 1. Инстантоны в четырехмерной теории Янга-Миллса

( Сканы решений данных задач принимаются до: **9.10.14**
на e-mail: hetzif@yandex.ru )

В этом листке приведены задачи из замечательной книги Валерия Рубакова “Классические калибровочные поля. Бозонные теории”. Параграф 13.3.

**Задача 1:** Записать выражение

$$Q = \frac{1}{24\pi^2}\int d\sigma_\mu \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\mathrm{Tr}(\omega\partial_\nu\omega^{-1}\cdot\omega\partial_\lambda\omega^{-1}\cdot\omega\partial_\rho\omega^{-1}) \tag{0.1}$$

в терминах $v_\alpha(\boldsymbol{n})$, где $\omega(\boldsymbol{n}) = v_\alpha(\boldsymbol{n})\sigma_\alpha$, и $\omega(n_\mu) \in SU(2)$, и $\sigma_0 = 1$ и $\sigma_i = -i\tau_i$, где $\tau_i$ — матрицы Паули. Показать, что полученное выражение представляет собой степень отображения удаленной сферы $S^3$ на сферу $S^3_{SU(2)}$.

**Задача 2:** Показать для произвольной калибровочной группы, что выражение

$$Q = \frac{1}{24\pi^2}\int d\sigma_\mu \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\mathrm{Tr}(\omega\partial_\nu\omega^{-1}\cdot\omega\partial_\lambda\omega^{-1}\cdot\omega\partial_\rho\omega^{-1}) \tag{0.2}$$

не меняется при гладких изменениях функции $\omega(x)$ на сфере $S^3$.

**Задача 3:** Доказать соотношения

$$\begin{aligned}&\sigma_\alpha\sigma_\beta^\dagger = \delta_{\alpha\beta} + i\eta_{\alpha\beta a}\tau^a\\ &\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\cdot\eta_{\gamma\delta a} = \eta_{\alpha\beta a} \qquad \text{(Самодуальность)}\end{aligned} \tag{0.3}$$

прямой подстановкой. Символы $\eta_{\alpha\beta a}$ называются (в физике) символами ’т Хоофта. Они атисимметричны относительно индексов $\alpha, \beta$, и их нулевые компоненты имеют вид

$$\eta_{0ia} = -\eta_{i0a} = \delta_{ia}, \quad \eta_{ija} = \varepsilon_{ija}. \tag{0.4}$$

Эти соотношения понадобятся нам в следующем листке.

**Задача 4:** Подставив анзатц $A^a_\mu = -i\eta_{\mu\nu a}x_\nu f(r)$, в уравнение самодуальности $F^a_{\mu\nu} = {}^*F^a_{\mu\nu}$, найти $f(r)$, где $r = |\boldsymbol{x}|$.

**Задача 5:** Показать, что $S_I = \frac{8\pi^2}{g^2}$, где $S_E = -\frac{1}{2g^2}\int \mathrm{Tr}(F^2_{\mu\nu})d^4x$, для одноинстантонного решения: $A^{a,\mathrm{inst}}_\mu$, найденного в предыдущей задаче.

**Задача 6:** Показать, что

$$\begin{aligned}&\sigma_\alpha^\dagger\sigma_\beta = \delta_{\alpha\beta} + i\bar\eta_{\alpha\beta a}\tau^a\\ &\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\cdot\bar\eta_{\gamma\delta a} = -\bar\eta_{\alpha\beta a} \qquad \text{(Антисамодуальность)}\\ &\omega^{-1}\partial_\mu\omega = -i\bar\eta_{\mu\alpha\alpha}\frac{n_\alpha}{r}\tau_a,\end{aligned} \tag{0.5}$$

где $\bar\eta_{\mu\nu a}$ — антисамодуальный символ ’т Хоофта,

$$\bar\eta_{0ia} = -\bar\eta_{i0a} = -\delta_{ia}, \quad \bar\eta_{ija} = \varepsilon_{ija}, \tag{0.6}$$

и $\omega^{-1} = \sigma^\dagger_\alpha n_\alpha$. Далее показать, что топологическое число $Q$ функции $\omega^{-1} = \sigma^\dagger_\alpha n_\alpha$ равно $-1$. А также, что поле $A_\mu = -i\bar\eta_{\mu\nu a}x_\nu\tau_a\frac{1}{r^2+\rho^2}$ удовлетворяют уравнению антисамодуальности $F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}$.