Задачи 2. Вычисление числа n-инстантонных решений методом ядра уравнения теплопроводности

(Сканы решений данных задач принимаются до: **23.10.14**
на e-mail: hetzif@yandex.ru)

В этом листке мы будем находить полное число n-инстантонных решений методом ядра уравнения теплопроводности (Heat Kernel).

Немного истории. После появления статьи А. А. Белавина, А. М. Полякова, Ю. С. Тюпкина, А. С. Шварца (BPST) [1], в которой было выведено уравнение самодуальности и найдено одноинстантонное решение уравнения самодуальности, люди стали пытаться найти n-инстантонные решения. Основополагающие статьи в этом направлении это статьи Э. Виттена и Д. Бурланкова, В. Дутышева [2,3]. После этого в статье А. Шварца [4], которую фактически здесь мы представляем в виде Задачи 2, было найдено количество n-инстантонных решений. Полная же конструкция всех решений уравнения самодуальности была дана в статье Атьи, Хитчина, Дринфельда и Манина (ADHM) [5].

Задача 1: Рассмотрим четырехмерную Евклидову теорию Янга-Миллса с калибровочной группой $G = O(4)$. Пусть генераторы $O(4)$ обозначаются как $I_{\alpha\beta}$. Тогда компоненты векторного поля есть $A^{\alpha\beta}_\mu(x)$.

(a). Покажите, что $A^{\alpha\beta}_\mu(x) = -A^{\beta\alpha}_\mu(x)$, а также, что коммутационное соотношение для генераторов $O(4)$ дается формулой

$$[I_{\alpha\beta}, I_{\gamma\delta}] = \delta_{\alpha\gamma}I_{\beta\delta} + \delta_{\beta\delta}I_{\alpha\gamma} - \delta_{\alpha\delta}I_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\gamma}I_{\alpha\delta}. \tag{0.1}$$

(b). Напишите как преобразуется поле $A^{\alpha\beta}_\mu(x)$, при инфинитезимальном повороте пространства $x_\mu \to x_\mu + \omega_{\mu\nu}x_\nu$.

(c). Напишите как преобразуется поле $A^{\alpha\beta}_\mu(x)$, при инфинитезимальном глобальном калибровочном преобразовании. (глобальное преобразование — преобразование не зависящее от точки пространства).

(d). Покажите, что анзатц $A^{\alpha\beta}_\mu(x) = a(r^2)(x_\alpha\delta_{\mu\beta} - x_\beta\delta_{\mu\alpha})$, где $r^2 = x_\mu x_\mu$, является инвариантным при одновременном вращении в координатном пространстве (μ) и в изотопическом (α, β), то есть покажите, что при одновременном преобразовании из пунктов (b) и (c) анзатц $A^{\alpha\beta}_\mu(x)$ переходит в себя.

(e). Покажите, что для генераторов $J^\pm_a = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}I_{bc} \pm I_{a0})$ верны следующие коммутационные соотношения:

$$[J^\pm_a, J^\pm_b] = \varepsilon_{abc}J^\pm_c, \quad [J^+_a, J^-_b] = 0. \tag{0.2}$$

Запишите, выражение для $J^\pm_a$ через $I_{\alpha\beta}$ с использованием символов т' Хоофта из Листка 1.

(f). В предыдущем пункте мы фактически разложили алгебру $O(4)$ на прямую сумму двух $SU(2)\times SU(2)$. Сделайте такое же разложение для калибровочного поля. Как будет выглядеть анзатц из пункта (d) в таком разложении. Используйте для удобства символы т' Хоофта. Сравните полученный ответ с анзатцом для калибровочного поля из Задачи 4 Листка 1.

Задача 2* (А. С. Шварц [4]): Пусть мы нашли n-инстантонное решение $A^0_\mu(x)$ уравнения самодуальности

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}. \tag{0.3}$$

для $G = SU(2)$ теории, где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$. Рассмотрим малое отклонение от решения уравнения самодуальности $A_\mu = A^0_\mu + a_\mu$.

(a). Напишите уравнение для a_μ, получаемое из $F_{\mu\nu} = {}^*F_{\mu\nu}$. Используйте в записи символ ковариантной производной $\nabla_\mu\omega = \partial_\mu\omega + [A^0_\mu, \omega]$.

(b). Покажите, что уравнение полученное в пункте (a) калибровочно инвариантно. Мы фиксируем эту инвариантность условием

$$\nabla_\mu a_\mu = 0. \tag{0.4}$$

Введем обозначение $f_{\mu\nu} = \nabla_\mu a_\nu - \nabla_\nu a_\mu$, а также $h_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} - {}^*f_{\mu\nu}$ и матрицу $a = \sigma_\mu a_\mu$. Рассмотрим операторы $L = \sigma_\mu\nabla_\mu$ и $L^\dagger = \sigma^\dagger_\mu\nabla_\mu$, где $\sigma_\mu = (\sigma_0, i\boldsymbol{\sigma})$, и $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ — матрицы Паули, а $\sigma_0 = 1$ — единичная матрица.

(c). Используя тождества из Листка 1 покажите, что

$$L^\dagger a = 0. \tag{0.5}$$

Откуда следует, что количество решений уравнения для a_μ, равно количеству решений уравнения (0.5), другими словами количеству нулевых мод оператора $L^\dagger$.

Найдем индекс оператора $L^\dagger$:

$$\mathrm{Ind}L^\dagger \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{dimKer}L^\dagger - \mathrm{dimKer}L, \tag{0.6}$$

для этого введем операторы $\Delta = LL^\dagger$ и $\tilde{\Delta} = L^\dagger L$ ($\Delta^\dagger = \Delta$, $\tilde{\Delta}^\dagger = \tilde{\Delta}$).

(d). Покажите, что

$$\mathrm{Ind}L = \mathrm{dimKer}\Delta - \mathrm{dimKer}\tilde{\Delta}, \tag{0.7}$$

(e). Покажите, что

$$\mathrm{Ind}L = \mathrm{Tr}(e^{-\Delta t} - e^{-\tilde{\Delta} t}) = \sum_n (e^{-\lambda_n t} - e^{-\tilde{\lambda}_n t}), \tag{0.8}$$

где $\Delta\psi_n = \lambda_n\psi_n$ и $\tilde{\Delta}\tilde{\psi}_n = \tilde{\lambda}_n\tilde{\psi}_n$. То есть фактически $\mathrm{Tr}(e^{-\Delta t} - e^{-\tilde{\Delta} t})$ не зависит от t.

Так как $\mathrm{Tr}(e^{-\Delta t} - e^{-\tilde{\Delta} t})$ не зависит от t его можно вычислять асимптотически при $t \to 0$. Найдем первые два коэффициента асимптотики $\mathrm{Tr}e^{-\Delta t} \stackrel{t\to 0}{=} \frac{c_0^\Delta}{t} + c_1^\Delta + O(t)$ и аналогично для $\tilde{\Delta}$. Такие коэффициенты c_k^Δ называются коэффициентами Сили (Seeley).

(f)*. Найдите коэффициенты Сили для оператора Δ (для примера смотрите [6]).

(g). Покажите, что $\tilde{\Delta}$ — не имеет нулей. Воспользуйтесь рассуждением от противного, а также тем, что если $\nabla^2_\mu\psi = 0$, то и $\nabla_\mu\psi = 0$.

Список литературы

[1] Belavin, A.A. and Polyakov, Alexander M. and Schwartz, A.S. and Tyupkin, Yu.S., *Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mills Equations*, Phys.Lett. B59, 85-87, 1975.

[2] Burlankov, D.E. and Dutyshev, V.N.

Higher Order Instantons Zh.Eksp.Teor.Fiz., 73, 377-381, 1977.

[3] Witten, Edward, *Some Exact Multi - Instanton Solutions of Classical Yang-Mills Theory*, Phys.Rev.Lett. 38, 121-124, 1977.

[4] A. S. Schwarz, *On Regular Solutions of Euclidean Yang-Mills Equations* Phys.Lett. B67, 172-174, 1977.

[5] Atiyah, M.F. and Hitchin, Nigel J. and Drinfeld, V.G. and Manin, Yu.I. *Construction of Instantons*, Phys.Lett. A65, 185-187, 1978.

[6] http://qft.itp.ac.ru/BT.pdf (стр. 15-20).