# Задачи 3. АДХМ конструкция

( Сканы решений данных задач принимаются до: **05.11.14**
на e-mail: hetzif@yandex.ru )

В этом листке мы повторим вывод АДХМ конструкции [1].

Пусть мы хотим найти общее решения для $N$ антиинстантонов в четырех-мерном Евклидовом пространстве, то есть полей удовлетворяющих условию антисамодуальности:

$$F_{\mu\nu} = -F^*_{\mu\nu}, \tag{0.1}$$

где $F^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}$ и $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$, и $A_\mu = A^a_\mu t_a$, где $t_a$ — генераторы алгебры $su(k)$, а также поля удовлетворяют условию

$$\frac{1}{16\pi^2}\int d^4x \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu}) = N. \tag{0.2}$$

Как мы уже знаем из предыдущего листка (результат статьи А.С. Шварца [2]), число таких решений должно быть равно $4kN$. Идея АДХМ состоит в том, что если мы сможем построить калибровочное поле $C_i(z)$ с нулевым тензором напряженности в четырехмерном комплексном пространстве, то сделав определенное отображение $\gamma$ из этого пространства на четырехмерное Евклидово пространство мы получим антисамодуальные поля:

$$\gamma : \mathbb{C}^4(z_1, z_2, z_3, z_4) \to \mathbb{R}^4(x_1, x_2, x_3, x_4). \tag{0.3}$$

Такое отображение $\gamma$ определяется следующей формулой

$$\hat{x} = q_2^{-1}q_1, \tag{0.4}$$

где

$$q_1 = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} z_3 & z_4 \\ -\bar{z}_4 & \bar{z}_3 \end{pmatrix}, \quad \hat{x} = x_4\mathbb{1} + i\vec{\sigma}\vec{x} = \begin{pmatrix} x_4 + ix_3 & ix_1 + x_2 \\ ix_1 - x_2 & x_4 - ix_3 \end{pmatrix}. \tag{0.5}$$

**Упражнение 1:** Найдите из формулы (0.4) чему равны комбинации $x_4 + ix_3$ и $x_2 + ix_1$.

Калибровочное поле $C_i(z)$ связанно с $A_\mu(x)$ по формуле

$$C_i(z) = \frac{\partial x_\mu}{\partial z_i}A_\mu(x). \tag{0.6}$$

**Упражнение 2:** Покажите, что тензор напряженности $G_{ik} = \partial_i C_k - \partial_k C_i + [C_i, C_k]$ связан с тензором $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$ по формуле (здесь $\partial_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$):

$$G_{ik}(z) = \frac{\partial x_\mu}{\partial z_i}\frac{\partial x_\nu}{\partial z_j}F_{\mu\nu}(x). \tag{0.7}$$

Далее, используя антисимметричность $F_{\mu\nu}$ мы можем записать, что

$$G_{ik}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial z_i}\frac{\partial x_\nu}{\partial z_j} - \frac{\partial x_\nu}{\partial z_i}\frac{\partial x_\mu}{\partial z_j}\right)F_{\mu\nu}(x) = \frac{\mathcal{D}(x_\mu, x_\nu)}{\mathcal{D}(z_i, z_k)}F_{\mu\nu}, \tag{0.8}$$

где по определению мы ввели "якобиан":

$$\frac{\mathcal{D}(x_\mu, x_\nu)}{\mathcal{D}(z_i, z_k)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial x_\mu}{\partial z_i}\frac{\partial x_\nu}{\partial z_j} - \frac{\partial x_\nu}{\partial z_i}\frac{\partial x_\mu}{\partial z_j}\Big). \tag{0.9}$$

**Упражнение 3:** Используя (0.4), покажите, что данный "якобиан" удовлетворяет уравнению самодуальности:

$$\frac{\mathcal{D}(x_\mu, x_\nu)}{\mathcal{D}(z_i, z_k)} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\frac{\mathcal{D}(x_\lambda, x_\sigma)}{\mathcal{D}(z_i, z_k)}. \tag{0.10}$$

Из самодуальности "якобиана" немедленно следует, что тензор $G_{ik}$ равен нулю если $F_{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнению антисамодуальности[1]:

$$G_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{D}(x_\mu, x_\nu)}{\mathcal{D}(z_i, z_k)} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\frac{\mathcal{D}(x_\lambda, x_\sigma)}{\mathcal{D}(z_i, z_k)}\right)F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{D}(x_\mu, x_\nu)}{\mathcal{D}(z_i, z_k)}(F_{\mu\nu} + F^*_{\mu\nu}) = 0. \tag{0.11}$$

То есть теперь мы должны решить уравнение $G_{ik}(z) = 0$. А именно построить калибровочное поле $C_i(z)$, для которого верно $\partial_i C_k - \partial_k C_i + [C_i, C_k] = 0$. Таким образом антисамодуальным полям на $\mathbb{R}^4$ соотвествуют поля с нулевой кривизной $G_{ik}$ получающиеся "pull-back" (0.6) с полей на $\mathbb{R}^4$.

Чтобы построить связность $C_i(z)$ с нулевой кривизной $G_{ik}(z)$ мы вводим следующую конструкцию. Каждой точке $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ пространства $\mathbb{C}^4$ мы приписываем $(2N+k)$-мерное линейное пространство $V_{2N+k}$, которое задается базисом ортонормированных векторов $e_i$, которые не зависят от точки $z$, и с эрмитовым скалярным произведением:

$$(\alpha e_i, \beta e_j) = \alpha\beta^*(e_i, e_j) = \alpha\beta^*\delta_{ij}. \tag{0.12}$$

Далее мы вводим $2N$ линейно независимых векторов, которые зависят от точки $z$ линейно:

$$\begin{pmatrix} u_n(z) \\ v_n(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{ni}e_i \\ D_{ni}e_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_3 & z_4 \\ -\bar{z}_4 & \bar{z}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_{ni}e_i \\ M_{ni}e_i \end{pmatrix}, \tag{0.13}$$

где $n = 1, ..., N$, а по повторяющемуся индексу $i$ подразумевается суммирование от 1 до $2N+k$, и мы ввели четыре комплексные матрицы $A, D, H, M$ размера $N \times 2N + k$, пары которых по сути умножаются на матрицы $q_1$ и $q_2$. Мы требуем, чтобы векторы $u_n(z)$ были ортогональны векторам $v_n(z)$:

$$(u_n(z), v_m(z)) = 0, \quad \text{для всех} \quad n, m = 1, .., N. \tag{0.14}$$

Это условие ортогональности будет важно при построении $G_{ik}(z) = 0$.

Теперь мы вводим ортонормированную систему из $k$ векторов $E^\alpha(z)$, которые ортогональны векторам $u_n(z)$ и $v_n(z)$:

$$\begin{aligned} &(E^\alpha(z), u_n(z)) = (E^\alpha(z), v_n(z)) = 0, \quad \alpha = 1, ..., k, \quad n = 1, ..., N. \\ &(E^\alpha(z), E^\beta(z)) = \delta^{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, ..., k. \end{aligned} \tag{0.15}$$

[1] Аналогично можно ввести $C_{\bar{i}}(z, \bar{z}) = \frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{z}_i}A^\mu(x)$, тогда $G_{\bar{i}\bar{k}}(z, \bar{z}) = 0$, но $G_{i,\bar{k}}(z, \bar{z}) \neq 0$.

Сразу заметим, что так построенные $E^\alpha(z)$, есть на самом деле $E^\alpha(z(x))$, то есть фактически это функции на $\mathbb{R}^4$. Чтобы показать это, удобно перейти от векторов $\{u_n, v_n\}$, к векторам $\{\tilde{u}_n, \tilde{v}_n\}$, которые определяются как:

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_n(z(x)) \\ \tilde{v}_n(z(x)) \end{pmatrix} = q_2^{-1} \begin{pmatrix} u_n(z) \\ v_n(z) \end{pmatrix} = \hat{x} \begin{pmatrix} A_{ni}e_i \\ D_{ni}e_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_{ni}e_i \\ M_{ni}e_i \end{pmatrix}, \tag{0.16}$$

и есть уже тоже функции от $x$. Такое преобразование от $\{u_n, v_n\}$ к $\{\tilde{u}_n, \tilde{v}_n\}$ является линейным,и векторы $E^\alpha(z)$ останутся ортогональными к векторам $\tilde{u}_n(z(x))$ и $\tilde{v}_n(z(x))$ и поэтому на самом деле будут зависеть только от $x$, то есть $E^\alpha(z) = E^\alpha(z(x))$.

Главный ответ состоит в том, что калибровочное поле $C_i(z) = C_i^a(z)t_a$ с нулевой кривизной $G_{ik}$, которое есть по сути матрица, с матричными элементами $C_i^{\alpha\beta}(z) = C_i^a(z)(t_a)^{\alpha\beta}$ (где матрицы $t_a$ — генераторы алгебры $su(k)$), равно

$$C_i^{\alpha\beta}(z) = (E^\alpha(z), \partial_i E^\beta(z)), \tag{0.17}$$

и следовательно

$$A_\mu^{\alpha\beta}(x) = (E^\alpha(z(x)), \partial_\mu E^\beta(z(x))), \tag{0.18}$$

то есть для данного вида калибровочного поля мы имеем: $G_{ik}(z) = 0$. Для того, чтобы показать, что $G_{ik}(z) = 0$ для связности вида (0.17), разложим производную $E^\alpha(z)$ как

$$\partial_i E^\alpha(z) = C_i^{\alpha\beta}(z)E^\beta(z) + F_i^\alpha(z), \tag{0.19}$$

где $(F_i^\alpha(z), E^\beta(z)) = 0$ для любых $\alpha, \beta$.

**Упражнение 4:** Рассмотрите $\partial_k\partial_i E^\alpha(z)$ и $\partial_i\partial_k E^\alpha(z)$, откуда выведите формулу

$$G_{ik}^{\alpha\beta}(z) + (\partial_k F_i^\alpha(z) - \partial_i F_k^\alpha(z), E^\beta(z)) = 0, \tag{0.20}$$

откуда следует, что для того, чтобы $G_{ik}^{\alpha\beta}(z) = 0$, должно быть $(\partial_k F_i^\alpha(z) - \partial_i F_k^\alpha(z), E^\beta(z)) = 0$.

Из того, что $(F_i^\alpha(z), E^\beta(z)) = 0$, следует, что $F_i^\alpha(z)$ раскладывается по базису $u_n(z), v_n(z)$:

$$F_i^\alpha(z) = X_i^{\alpha n}(z)u_n(z) + Y_i^{\alpha n}(z)v_n(z) \tag{0.21}$$

**Упражнение 5:** Покажите, что $\partial_i(u_n(z), E^\alpha(z)) = (u_n(z), \partial_i E^\alpha(z)) = 0$. Используя это, покажите, что $X_i^{\alpha n}(z) = 0$. Далее используя (0.13), покажите, что $(\partial_k F_i^\alpha(z) - \partial_i F_k^\alpha(z), E^\beta(z)) = 0$. Откуда следует, что $G_{ik}^{\alpha\beta}(z) = 0$.

Тем самым мы завершили построение $N$-антиинстантонного решения.

**Упражнение 6:** Условие ортогональности между векторами $u_n(z)$ и $v_m(z)$ есть условие на матрицы $A, D, H, M$. Выпишите эти условия явно в матричном виде. Далее используя анзатц

$$A = (B_1, B_2, I), \quad D = (-B_2^\dagger, B_1^\dagger, -J^\dagger), \quad H = (\mathbb{1}, 0, 0), \quad M = (0, \mathbb{1}, 0), \tag{0.22}$$

где $B_1$ и $B_2$ комплексные матрицы $N \times N$, далее $I$ — комплексная матрица $N \times k$ и $J$ — комплексная матрица $k \times N$, покажите, что уравнения на $A, D, H, M$ сводятся к уравнениям на $B_1, B_2, I, J$, вида

$$\begin{cases} [B_1, B_2] + IJ = 0, \\ [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J = 0. \end{cases} \tag{0.23}$$

Как мы увидим далее именно решения этих уравнений косвенно задают решения уравнений антисамодуальности, то есть наших $N$-антиинстантонов. Данные уравнения инвариантны при следующем преобразовании:

$$B_1 \to G^\dagger B_1 G, \quad B_2 \to G^\dagger B_2 G, \quad I \to G^\dagger I, \quad J \to JG, \tag{0.24}$$

где $G \in U(N)$.

**Упражнение 7:** Покажите, что количество независимых параметров при учете данных уравнений на матрицы $B_1, B_2, I, J$ и учете инвариатности относительно преобразований $G \in U(N)$ равно $\dim \mathcal{M}_{N,k} = 4Nk$, где $\mathcal{M}_{N,k}$ есть пространство модулей ("параметров") инстантонов. Вспомните вид одноинстантонного (антиинстантонного) решения из Листка 1. Сколько независимых параметров определяющих антиинстантон содержит это решение (не забывайте, что у нас есть еще 4 параметра определяющие положение антиинстантона в пространстве), почему оно не равно $\dim M_{1,2} = 8$? Какие параметры мы забыли?

**Упражнение 8:** Как мы уже знаем, ответ для антисамодуальных полей имеет вид $A_\mu^{\alpha\beta}(x) = (E^\alpha(z(x)), \partial_\mu E^\beta(z(x)))$. Покажите со всеми подробностями, что калибровочные преобразования

$$A_\mu \to \omega A_\mu \omega^\dagger + \omega \partial_\mu \omega^\dagger, \tag{0.25}$$

преобразуют вектора $E^\alpha$, как $E^\alpha \to \omega_{\alpha\beta} E^\beta$, где $\omega\omega^\dagger = \mathbb{1}$ и $\det \omega = 1$, то есть $\omega$ — элементы группы $SU(k)$. Отогональны ли новые вектора $\omega_{\alpha\beta} E^\beta$? (Вам понадобится формула (0.12))

Далее, ответ удобно записать в следующей форме [3]. А именно, введем векторы $q_m$, где $m = 1, .., 2N$, и $q_n = \tilde{u}_n$, $q_{N+n} = \tilde{v}_n$, при $n = 1, .., N$, а также матрицы $\Delta$ и $U$, которые определяются, как:

$$\begin{aligned} q_m &= \Delta_{mi} e_i \\ E^\alpha &= U^{\alpha i} e_i, \end{aligned} \tag{0.26}$$

и есть комплексные матрицы $2N \times 2N + k$ и $k \times 2N + k$.

**Упражнение 9:** Покажите, что условие ортогональности $(E^\alpha, q_m)$=0 и вектор потенциал $A_\mu(x)$ запишутся как

$$U\Delta^\dagger = \Delta U^\dagger = 0, \quad A_\mu(x) = U\partial_\mu U^\dagger, \tag{0.27}$$

а также $UU^\dagger = \mathbb{1}$, что следует из условия $(E^\alpha, E^\beta) = \delta^{\alpha\beta}$. Напишите как выражается матрица $\Delta$ через матрицы $B_1, B_2, I, J$.

**Задача 1*:** Получите одно-антиинстантонное решение (Листок 1) для группы $SU(2)$ (т.е. $N = 1, k = 2$), используя АДХМ конструкцию (Результаты упражнений 6,7,8,9 могут быть очень полезны при решении).

# Список литературы


[1] Atiyah, M.F. and Hitchin, Nigel J. and Drinfeld, V.G. and Manin, Yu.I. *Construction of Instantons*, Phys.Lett. A65, 185-187, 1978.

[2] A. S. Schwarz, *On Regular Solutions of Euclidean Yang-Mills Equations* Phys.Lett. B67, 172-174, 1977.

[3] Nick Dorey, Timothy J. Hollowood (Swansea U.), Valentin V. Khoze (Durham U.), Michael P. Mattis, *The Calculus of many instantons*, Phys.Rept. 371 (2002) 231-459, hep-th/0206063.