Листок 4. Нахождение неподвижных точек векторного поля на пространстве модулей инстантонов

(Сканы решений данных задач принимаются до: **14.11.14**
на e-mail: hetzif@yandex.ru)

В этом листке мы будем находить неподвижные точки векторного поля на пространстве модулей инстантонов.

Итак у нас есть уравнения определяющие пространство модулей инстантонов $M_{N,k}$:

$$\begin{cases} [B_1, B_2] + IJ = 0 \\ [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J = 0, \end{cases} \tag{0.1}$$

где B_1, B_2 — матрицы $N \times N$, далее I — матрица $N \times k$ и J — матрица $k \times N$. Данные уравнения инвариантны относительно следующих преобразований:

$$B_1 \to G^\dagger B_1 G, \quad B_2 \to G^\dagger B_2 G, \quad I \to G^\dagger I, \quad J \to JG, \tag{0.2}$$

где $G \in U(N)$. На нашем пространстве модулей действует векторное поле V, порожденное компактной группой тора: $U(1)^2 \times U(1)^{k-1}$, а именно действие данного поля на пространстве модулей имеет вид

$$B_1 \to t_1 B_1, \quad B_2 \to t_2 B_2, \quad I \to It, \quad J \to t_1 t_2 t^\dagger J, \tag{0.3}$$

где $t_1 = e^{i\varepsilon_1 \tau}$, $t_2 = e^{i\varepsilon_2 \tau}$ и $t = \mathrm{diag}(e^{ia_1\tau}, ..., e^{ia_k\tau})$, где $\sum_{i=1}^k a_i = 0$. Неподвижные точки такого действия определяются уравнениями

$$\begin{cases} t_1 B_1 = G B_1 G^\dagger \\ t_2 B_2 = G B_2 G^\dagger \\ It = GI \\ t_1 t_2 t^\dagger J = J G^\dagger. \end{cases} \tag{0.4}$$

Разберем случай $k = 1$. В этом случае матрица I есть просто столбец высотой N, а матрица J — строка длиной N. Докажем следующую лемму:

Лемма 1: Вектора I, $B_1 I$, $B_2 B_1 I$, $B_2 B_1 B_2 I, ... \in \mathrm{Ker} J$.
Доказательство: При $k = 1$ мы получаем, что $t = 1$, тогда используя (0.4), имеем: $JI = t_1^\dagger t_2^\dagger JGI = t_1^\dagger t_2^\dagger JI$, откуда следует, что $JI = 0$. Далее опять используя (0.4), имеем:

$$J(B_i I) = t_1^\dagger t_2^\dagger J G B_i I = t_1^\dagger t_2^\dagger J t_i B_i G I = t_1^\dagger t_2^\dagger J t_i B_i I = t_1^\dagger t_2^\dagger t_i J(B_i I), \tag{0.5}$$

откуда $JB_i I = 0$, и.т.д.
Упражнение 1: Докажите данную лемму для общего вида вектора $B_1^{n_1} B_2^{m_1} B_1^{n_2} B_2^{m_2} \cdot ... \cdot I$.

Лемма 2: Вектора $\{B_1^{n_1} B_2^{m_1} B_1^{n_2} B_2^{m_2} \cdot ... \cdot I\}$ линейно независимы.
Доказательство: Имеем

$$G(B_1^{n_1} B_2^{m_1} B_1^{n_2} B_2^{m_2} \cdot ... \cdot I) = t_1^{\sum n_i} t_2^{\sum m_i} (B_1^{n_1} B_2^{m_1} B_1^{n_2} B_2^{m_2} \cdot ... \cdot I), \tag{0.6}$$

то есть все такие вектора являются собственными для G и имеют различные собственные значения, значит они либо равны нулю либо линейно независимы.

В описании Дональдсона вектора $\{B_1^{n_1}B_2^{m_1}B_1^{n_2}B_2^{m_2}\cdot ... \cdot I\}$ порождают все линейное N-мерное пространство V_N, с другой стороны как мы показали они находятся в ядре J, откуда следует, что $J=0$, а значит $[B_1,B_2]=0$. Таким образом все вектора задаются набором $\{B_1^n B_2^m I\}$.

Мы знаем что из бесконечного числа комбинаций $\{B_1^n B_2^m I\}$ ненулевых векторов N штук, так как все наше пространсво имеет размерность N. Мы можем выбрать этот набор ненулевых векторов разными способами. Каждому такому выбору ненулевого набора можно сопоставить диаграмму Юнга Y с общем числом клеточек N: $|Y|=N$, например для $N=11$ один из наборов задается следующей диаграммой:

I	$B_1 I$	$B_1^2 I$	$B_1^3 I$	$B_1^4 I$	$B_1^5 I$
$B_2 I$	$B_2 B_1 I$				
$B_2^2 I$	$B_2^2 B_1 I$				
$B_2^3 I$					

Далее каждой такой диграмме Юнга соответствует определенный вид матриц B_1 и B_2, тогда как мы всегда выбираем матрицу I в виде

$$I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{0.7}$$

Упражнение 2: Покажите, что для заданной диаграммы Юнга Y, матрицы B_1 и B_2 должны быть равны

$$(B_1)_{\sigma\sigma'} = \begin{cases} 1, & \text{если клетка } \sigma' \text{ левый сосед клетки } \sigma : \quad \begin{array}{|c|c|}\hline \sigma' & \sigma \\ \hline \end{array} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} ,$$
$$(B_2)_{\sigma\sigma'} = \begin{cases} 1, & \text{если клетка } \sigma' \text{ верхний сосед клетки } \sigma : \quad \begin{array}{|c|}\hline \sigma' \\ \hline \sigma \\ \hline \end{array} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} , \tag{0.8}$$

здесь σ и σ' нумеруют клетки данной диаграммы Юнга Y, начиная из угла вправо, пробегая значения от 1 до N:

1	2	3	4	5	6
7	8				
9	10				
11					

Например для диаграммы Юнга, которая есть просто строка из трех клеток мы получаем следующее выражение для B_1 и B_2:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{0.9}$$

соответственно если у нас столбец из трех клеток, то нужно просто поменять выражения для B_1 и B_2 местами.
Упражнение 3: Найдите выражение для матрицы G из формулы (0.4), при данной диаграмме Юнга Y.

Задача 1: Покажите, что при $k > 1$, фиксированные точки задаются k диаграммами Юнга $\vec{Y} = (Y_1, ..., Y_k)$ с полным числом клеток N: $|\vec{Y}| = N$. Столбцы I_α, $\alpha = 1, .., k$ матрицы $I = (I_1, ..., I_k)$ размера $N \times k$, можно рассматривать, как вектора порождающие векторные пространства V_N^α. В ходе решения обобщите леммы 1 и 2 на случай произвольного k. Покажите, что басис в пространстве V_N^α состоит из векторов $\{B_1^n B_2^m I_\alpha\}$. Найдите выражения для B_1, B_2 и G для заданной серии диаграмм Юнга $\vec{Y}$. Используйте удобное обозначение $\phi_s = a_\alpha + (i-1)\epsilon_1 + (j-1)\epsilon_2$, где $s = (i, j)$ — клетка диаграммы Юнга Y_α и (i, j) ее координаты (угловая клетка имеет координаты $(1, 1)$). Для разминки можно попробовать начать со случая $k = 2$.