Задачи 5. Примеры теоремы Дюйстрмаата-Хекмана (Локализации)

(Сканы решений данных задач принимаются до: **19.11.14**
на e-mail: hetzif@yandex.ru)

В этом листке мы кратко рассмотрим теорему о Локализации и вычислим несколько примеров с ее применением. Есть много хорошей литературы, где разобрана данная теорема [1–5].

Приведем формулировку теоремы:

Пусть M есть $2n$-мерное компактное симплектическое многообразие с симплектической[1] формой ω. И пусть M инвариантно при действии группы $U(1)$, где действие порождается векторным полем V. Пусть H — гамильтониан на M, соответствующий $U(1)$-действию: $dH = i_V\omega$. Тогда статистическая сумма вычисляется точно методом перевала [6]:

$$\int_M e^{\omega-\beta H} = \int_M \frac{\omega^n}{n!}e^{-\beta H} = \big(\frac{2\pi}{\beta}\big)^n \sum_{P_c} e^{-\beta H(P_c)}\frac{\sqrt{\det\omega(P_c)}}{\sqrt{\det \mathrm{Hess}(P_c)}}, \tag{0.1}$$

где P_c — изолированные критические точки гамильтониана ($dH(P_c) = 0$[2]) и $\mathrm{Hess}_{ij} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial x^j}\Big|_{P_c}$ — матрица Гессе в критической точке (квадратичная часть гамильтониана в локальных координатах в окрестности седловой точки), также $\omega^n = \omega\wedge\omega\wedge ... \wedge\omega$.

Задача 1: Самая простая задача, которая предлагается, как пример теоремы о локализации это задача интегрирования по двумерной сфере S^2. Выбирая симплектическую 2-форму в виде $\omega = \sin\theta d\theta\wedge d\phi$, а также векторное поле $V = a\frac{\partial}{\partial\phi}$, порожденное компактной абелевой группой $U(1)$, которая действует на S^2, найдите Гамильтониан H и вычислите локализацией (методом перевала) интеграл

$$I = \int e^{\omega - H}. \tag{0.2}$$

Также вычислите данный интеграл обычным методом и убедитесь в совпадении ответов.

Задача 2 (Интеграл Хариш-Чандра-Итцыксона-Зубера [7–9]): Эта задача является более сложным примером применения теоремы о локализации. А именно рассмотрим матричный интеграл вида

$$I(t) = \int_{U(N)} dU e^{t\mathrm{Tr}(AUBU^\dagger)}, \tag{0.3}$$

где интегрирование идет по группе унитарных матриц $U(N)$ и dU — мера Хаара, а матрицы A и B — произвольные эрмитовы матрицы.

(a). Покажите, что без ограничения общности можно считать, что A и B есть диагональные матрицы: $A = \mathrm{diag}(a_1, ..., a_N)$ и $B = \mathrm{diag}(b_1, ..., b_N)$.

[1]“Симплектическая” означает, что 2-форма ω замкнутая и невырожденная: $d\omega = 0$ и $i_V\omega(x) \neq 0$, где $\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij}dx^i\wedge dx^j$ есть 2-форма и $i_V\omega(x) = V^i\omega_{ij}dx^j$, где поле V не равно нулю в точке x.

[2]Отсюда видно, что V должно зануляться в критических точках, так как ω невырождена.

Далее, по сути интеграл зависит не от унитарных матриц U, а от матриц $M = UBU^\dagger$ (от коприсоединенной орбиты). То есть фактически у нас есть “калибровочная” инвариантность: $U \sim U\Lambda$, где $\Lambda = \mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_N})$, то есть многообразие M гомеоморфно многообразию $U(N)/U(1)^N$.

(b). Покажите, что размерность многообразия M есть $N(N-1)$, то есть всегда четная.

(c). Покажите, что при переходя от интегрирования по мере Хаара dU к интегрированию по мере Хаара dM, интегрирование по “калибровочному” параметру Λ выносится как постоянный множитель:

$$I(t) = \int_{U(N)} dU e^{t\mathrm{Tr}(AUBU^\dagger)} = c \int_{U(N)/U(1)^N} dM e^{t\mathrm{Tr}(AM)}, \tag{0.4}$$

для этого сначала перейдите от интегрирования по U к интегрированию по W, где $U = W\Lambda$, и $W \in U(N)/U(1)^N$. Рассмотрите инвариантную норму на группе $U(N)$ вида $||U_1 - U_2|| = \mathrm{Tr}((U_1 - U_2)(U_1 - U_2)^\dagger)$, проверьте, что она инвариантна относительно умножений слева и справа на унитарные матрицы (практически очевидно). Перейдите к инфинитезимальной форме: $dU = U_1 - U_2$, то есть рассмотрите интервал $ds^2 = \mathrm{Tr}(dUdU^\dagger)$. Покажите, что он равен $\mathrm{Tr}(dUdU^\dagger) = \mathrm{Tr}(dWdW^\dagger) + \mathrm{Tr}(d\Lambda d\Lambda^\dagger)$, какое свойство матриц W мы фактически здесь использовали (это свойство понадобится в пункте (i))? Далее, имея инвариантную меру dW, ясно, что мы можем получить инвариантную меру dM на том же многообразии.

Очевидно, что наш Гамильтониан есть просто $H = \mathrm{Tr}(AM)$, и нам остается понять, как выглядит наша симплектическая форма ω и векторное поле V, генерируемое компактной группой действующей на нашем многообразии M. Итак симплектическая форма на коприсоединенной орбите M известна, как форма Кирилова-Костанта и задается следующим образом, а именно заметим, что в произвольной точке M_0 нашего многообразия M, касательные вектора имеют вид $V = [M_0, iX]$, где X какая-то эрмитова матрица. Тогда симплектическая форма ω_{M_0} в точке M_0 определяется как:

$$\omega_{M_0}(V_1, V_2) = \omega_{M_0}([M_0, iX_1], [M_0, iX_2]) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Tr}(M_0[X_1, X_2]). \tag{0.5}$$

(d). Покажите, что данная симплектическая форма инвариантна относительно сопряжения матрицами из $U(N)$ группы: $M_0 \to UM_0U^\dagger$.

(e). Работая явно с матричными коэффициентами в точке $M_0 = B$ и используя предположение, что все элементы $b_1, ..., b_N$ различны, проверьте, что ω не вырождена в B и следовательно не вырождена везде в силу $U(N)$ инвариантности.

(f). Прямым вычислением проверьте, что ω замкнута: $d\omega = 0$.

В итоге мы убедились в том, что ω действительно симплектическая форма, а также она инвариантна на M. Отсюда по теореме Хаара о единственености инвариантной меры [10] следует, что величина $\omega^{\frac{N^2-N}{2}}$ и есть наша мера dM (с точностью до множителя).

(g). Покажите, что наше векторное поле, необходимое для применения теоремы о локализции, порожденное компактной группой тора, есть вектора $V_A = [M_0, iA]$. Для этого покажите, что $i_{V_A}\omega_{M_0}(V) = dH(V)$, где $V = [M_0, iX]$ — произвольный касательный вектор в точке M_0. Напишите, как действует эта компактная группа тора на нашем многообразии M.

Таким образом все предыдущие пункты были необходимы для обоснования применимости теоремы о локализации к нашему интегралу. Теперь нам остается ее применить и вычислить интеграл. Вернемся опять к виду интеграла

$$I(t) = c\int_{U(N)/U(1)^N} dW e^{t\mathrm{Tr}(AWBW^\dagger)}. \tag{0.6}$$

(h). Выведите уравнение на стационарные точки:

$$[W_0BW_0^\dagger, A] = 0, \tag{0.7}$$

исходя из формулы $dH = d\mathrm{Tr}(AWBW^\dagger) = 0$ (здесь d есть фактически вариация по унитарным матрицам W). Решите данное уравнение (то есть найдите W_0), используя то, что матрицы A и B диагональны. Как называются такие матрицы W_0? Что фактически они делают с элементами матрицы B?

(i). Рассмотрите малые вариации $W = e^{iX}W_0$, вокруг стационарных точек W_0, где X — эрмитовы матрицы. Покажите, что мера на матрицах dX равна:

$$\int dW = \int \prod_{i<j} d\mathrm{Re}X_{ij} d\mathrm{Im}X_{ij}, \tag{0.8}$$

для этого используйте результат пункта (c), почему в произведении нет членов с $i = j$?

(j). Вычислите значение экспоненты в фиксированной точке, а также квадратичный член по коэффициентам X_{ij}.

(k). Вычислите Гауссов интеграл по X_{ij}. Вы должны получить окончательный ответ в виде

$$I(t) = C\Big(\frac{\pi}{t}\Big)^{\frac{N(N-1)}{2}}\frac{\det(e^{ta_ib_j})}{\Delta(a)\Delta(b)}, \tag{0.9}$$

где C — константа, а $\Delta(a), \Delta(b)$ определители Вандермонда ($\Delta(a) = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant N}(a_i - a_j) = \det(a_i^{j-1})$).

Список литературы

[1] J.J. Duistermaat and G.J. Heckman, *On the Variation in the Cohomology of the Sympleetic Form of the Reduced Phase Space*, Invent. math. 69, 259-268 (1982)

[2] Edward Witten, *TWO DIMENSIONAL GAUGE THEORIES REVISITED* , Journal of Geometry and Physics 9 (1992) 303-368, arXiv:hep-th/9204083

[3] Marcos Marino, *Lectures on localization and matrix models in supersymmetric Chern–Simons–matter theories* , arXiv:1104.0783v5, 2012.

[4] Vasily Pestun, *LECTURES ON EQUIVARIANT LOCALIZATION.*

[5] T. Karki and Antti J. Niemi, *ON THE DUISTERMAAT-HECKMAN FORMULA AND INTEGRABLE MODELS*, arXiv:hep-th/9402041v1, 1994.

[6] И. В. Колоколов, Е. А. Кузнецов, А. И. Мильштейн, Е. В. Подивилов, А. И. Черных, Д. А. Шапиро, Е. Г. Шапиро *Задачи по метематическим методам физики*, Москва, Глава 6.

[7] C. Itzykson and J.-B. Zuber, *The planar approximation. II*, J. Math. Phys. 21 (3), March 1980

[8] P. Zinn-Justin, *On some integrals over the U(N) unitary group and their large N limit*, J.Phys.A36:3173-3194,2003, arXiv:math-ph/0209019

[9] http://terrytao.wordpress.com/2013/02/08/the-harish-chandra-itzykson-zuber-integral-formula/

[10] http:// en.wikipedia.org/wiki/Haar_measure