Листок 6. Вычисление детерминанта векторного поля и приведение его к простому виду

(Сканы решений данных задач принимаются до: **29.11.14**
на e-mail: hetzif@yandex.ru)

Вначале в этом листке мы будем находить детерминант векторного поля в фиксированных точках. Затем рассмотрим задачу о приведении детерминанта векторного поля к определенному виду, содержащему произведение по рукам и ногам диаграмм Юнга.

Как оказывается, обратное значение детерминанта векторного поля в фиксированных точках и есть статистическая сумма инстантонов, вернее вклад от N-инстантонного решения. На самом деле, чтобы аккуратно применить теорему о локализации к интегралу по пространству модулей инстантонов, нужно проделать большую работу и правильно регуляризовать данный интеграл, а именно регуляризовать инфракрасную и ультрафиолетовую расходимости. Инфракрасная расходимость, грубо говоря, берется из-за того, что в инстантоне есть непрерывный параметр положения центра инстантона R^{μ}_{center}, интеграл по которому очевидно расходится. Данная расходимость эффективно регулируется помещение теории в коробку, но не простую, а особую, сохраняющую определенные симметрии, которая называется Ω-фон (Ω-background) и эффективно приводит к появлению параметров $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Ультрафиолетовая расходимость регуляризуется, грубо говоря, приписыванием инстантону некоторого характерного размера.

Задача 1. (Вычисление детерминанта векторного поля в фиксированных точках): В Листке 4 мы нашли неподвижные точки действия компактной группы тора $U(1)^2 \times U(1)^{k-1}$:

$$B_1 \to t_1 B_1, \quad B_2 \to t_2 B_2, \quad I \to It, \quad J \to t_1 t_2 t^{\dagger} J, \tag{0.1}$$

где $t_1 = e^{i\varepsilon_1 \tau},\ t_2 = e^{i\varepsilon_2 \tau},\ t = \mathrm{diag}(e^{ia_1\tau}, ..., e^{ia_k\tau}),\ \sum_{i=1}^{k} a_i = 0$, на пространстве модулей инстантонов $\mathcal{M}_{N,k}$, которое задается уравнениями на матрицы $\mathcal{A} = (B_1, B_2, I, J)$:

$$\begin{cases} [B_1, B_2] + IJ = \mu_{\mathbb{C}} = 0 \\ [B_1, B_1^{\dagger}] + [B_2, B_2^{\dagger}] + II^{\dagger} - J^{\dagger}J = \mu_{\mathbb{R}} = 0. \end{cases} \tag{0.2}$$

Возьмем произвольную неподвижную точку. В ней имеется касательное пространство, натянутое на вектора $(\delta B_1, \delta B_2, \delta I, \delta J)$. На эти касательные вектора также действует компактная группа тора:

$$\delta B_1 \to t_1 \delta B_1, \quad \delta B_2 \to t_2 \delta B_2, \quad \delta I \to \delta I t, \quad \delta J \to t_1 t_2 t^{\dagger} \delta J. \tag{0.3}$$

Тогда собственные значения и вектора этого действия определяются уравнениями:

$$t_1 \delta B_1 = e^{i\lambda\tau} G^{\dagger} \delta B_1 G, \quad t_2 \delta B_2 = e^{i\lambda\tau} G^{\dagger} \delta B_2 G, \quad \delta I t = e^{i\lambda\tau} G^{\dagger} \delta I, \quad t_1 t_2 t^{\dagger} \delta J = e^{i\tau\lambda} \delta J G. \tag{0.4}$$

(a). Используя из Листка 4 то, что матрица G равна $G_{ss'} = \delta_{ss'} e^{i\tau\phi_s}$, где $\phi_s = a_\alpha + (i-1)\varepsilon_1 + (j-1)\varepsilon_2$ и $s = (i,j) \in Y_\alpha$, покажите, что собственные значения и вектора действия тора задаются уравнениями:

$$\begin{aligned} &\lambda(\delta B_1)_{ss'} = (\varepsilon_1 + \phi_s - \phi_{s'})(\delta B_1)_{ss'}, \\ &\lambda(\delta B_2)_{ss'} = (\varepsilon_2 + \phi_s - \phi_{s'})(\delta B_2)_{ss'}, \\ &\lambda \delta I_{s\alpha} = (a_\alpha + \phi_s)\delta I_{s\alpha}, \\ &\lambda \delta J_{\alpha s} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \phi_s - a_\alpha)\delta J_{\alpha s}. \end{aligned} \tag{0.5}$$

Используя эти уравнения, напишите явно все собственные значения которые мы получили и соответствующие им собственные вектора.

Среди собственных векторов которые мы нашли есть лишние:

(b). Покажите, что касательный вектор $\delta\mu_{\mathbb{C}} = \delta([B_1, B_2]+IJ)$ сам является собственным вектором для действия тора с собственным значением $\lambda = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \phi_s - \phi_{s'}$. Так как пространство модулей инстантонов включает в себя уравнение $\mu_{\mathbb{C}} = 0$, следовательно $\delta\mu_{\mathbb{C}} = 0$ и мы должны исключить собственное значение $\lambda = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \phi_s - \phi_{s'}$ из нашего набора.

Теперь рассмотрим оставшееся ограничение на собственные вектора:

$$\delta\mu_{\mathbb{R}} = ([\delta B_1, B_1^\dagger] + [\delta B_2, B_2^\dagger] + \delta I I^\dagger - J^\dagger \delta J) + ([B_1, \delta B_1^\dagger] + [B_2, \delta B_2^\dagger] + I\delta I^\dagger - \delta J^\dagger J) = 0 \tag{0.6}$$

Для того, чтобы упростить это выражение рассмотрим сюжет о построении метрики на пространстве модулей $\mathcal{A} = (B_1, B_2, I, J)$. Определим следующее скалярное произведение на вариациях:

$$\langle \delta_1\mathcal{A}, \delta_2\mathcal{A}\rangle_0 = \mathrm{ReTr}(\delta_1 B_1 \delta_2 B_1^\dagger + \delta_1 B_2 \delta_2 B_2^\dagger + \delta_1 I \delta_2 I^\dagger + \delta_1 J^\dagger \delta_2 J). \tag{0.7}$$

Наше пространство модулей обладает калибровочный инвариантностью

$$\mathcal{A} = (B_1, B_2, I, J) \sim \mathcal{A}^G = (G^\dagger B_1 G, G^\dagger B_2 G, G^\dagger I, JG), \quad G \in U(N), \tag{0.8}$$

и мы должны выбрать вариацию $\mathcal{D}\mathcal{A}$, которая ортогональна данным калибровочным преобразованиям. Будем искать такую вариацию в виде

$$\mathcal{D}\mathcal{A} = dA + Y \cdot \mathcal{A}, \tag{0.9}$$

где d — обычный дифференциал, а Y — матрица $N \times N$ и $Y \cdot \mathcal{A} = ([Y, B_1], [Y, B_2], YI, -JY)$. Тогда мы требуем, чтобы

$$\mathcal{D}\mathcal{A} \perp \delta_\omega \mathcal{A}, \tag{0.10}$$

где $\delta_\omega\mathcal{A} = \mathcal{A}^G - \mathcal{A} = ([\omega, B_1], [\omega, B_2], \omega I, -J\omega)$, где $G = \mathbb{1} - \omega$ и $\omega^\dagger = -\omega$. Условие $\mathcal{D}\mathcal{A} \perp \delta_\omega\mathcal{A}$ эквивалентно требованию $\langle \mathcal{D}\mathcal{A}, \delta_\omega\mathcal{A}\rangle_0 = 0$

(c). Покажите, что данное условие на вариацию $\mathcal{D}\mathcal{A}$ приводит к уравнению

$$\mathrm{ReTr}\big(([\mathcal{D}B_1, B_1^\dagger] + [\mathcal{D}B_2, B_2^\dagger] + \mathcal{D}I I^\dagger - J^\dagger \mathcal{D}J)\omega\big) = 0, \tag{0.11}$$

Покажите, что из этого следует:

$$[\mathcal{D}B_1, B_1^\dagger] + [\mathcal{D}B_2, B_2^\dagger] + \mathcal{D}I I^\dagger - J^\dagger \mathcal{D}J = [B_1, \mathcal{D}B_1^\dagger] + [B_2, \mathcal{D}B_2^\dagger] + I\mathcal{D}I^\dagger - \mathcal{D}J^\dagger J. \tag{0.12}$$

(d). Заменяя в уравнении (0.6) обычную вариацию δ на калибровочно-инвариантную $\mathcal{D}$, покажите, что его можно переписать в виде

$$\delta\mu_{\mathbb{R}} = [\mathcal{D}B_1, B_1^\dagger] + [\mathcal{D}B_2, B_2^\dagger] + \mathcal{D}I I^\dagger - J^\dagger \mathcal{D}J = 0. \tag{0.13}$$

(e). Покажите, что собственные значения вектора $\delta\mu_{\mathbb{R}}$ под действием группы тора есть $\lambda = \phi_s - \phi_{s'}$.

В итоге мы получаем выражение для детерминанта векторного поля:

$$\det V_{\vec{Y}} = \frac{\prod_{s,s' \in \vec{Y}} (\varepsilon_1 + \phi_s - \phi_{s'})(\varepsilon_2 + \phi_s - \phi_{s'}) \prod_{\alpha=1}^{k} \prod_{s \in Y_\alpha} (a_\alpha + \phi_s)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \phi_s - a_\alpha)}{\prod_{s,s' \in \vec{Y}} (\phi_s - \phi_{s'})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \phi_s - \phi_{s'})}, \tag{0.14}$$

где $\vec{Y} = (Y_1, ..., Y_k)$. Инстантонная статистическая сумма для чистой теории Янга-Миллса дается формулой

$$Z(q) = \sum_{N=0}^{\infty} q^N \sum_{\substack{\vec{Y} \\ |\vec{Y}|=N}} \frac{1}{\det V_{\vec{Y}}}, \tag{0.15}$$

где[1] $q = e^{-\frac{4\pi^2}{g^2}}$ и $|\vec{Y}|$ — полное число клеток во всех диаграммах $Y_1, ..., Y_k$.

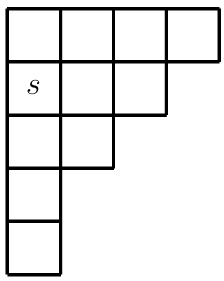
Задача 2. (Приведение детерминанта векторного поля к простому виду): В этой задаче мы докажем следующее тождество для детерминанта векторного поля:

$$\det V_{\vec{Y}} = \frac{\prod_{s,t\in\vec{Y}}(\varepsilon_1+\phi_s-\phi_t)(\varepsilon_2+\phi_s-\phi_t)\prod_{\alpha=1}^{k}\prod_{s\in Y_\alpha}(a_\alpha+\phi_s)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\phi_s-a_\alpha)}{\prod_{s,t\in\vec{Y}}(\phi_s-\phi_t)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\phi_s-\phi_t)} \equiv$$

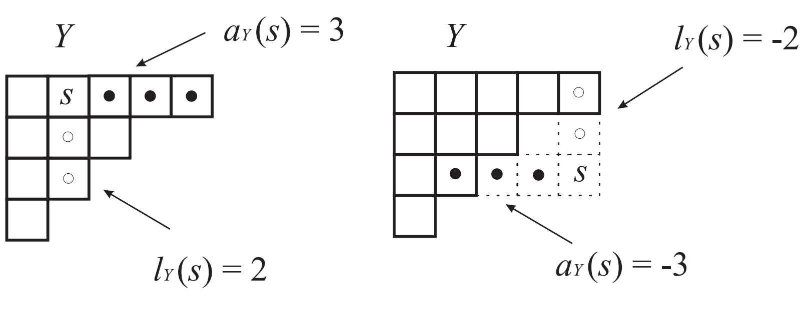
$$\equiv \prod_{\alpha,\beta=1}^{k}\prod_{s\in Y_\alpha}(a_\alpha - a_\beta - L_\beta(s)\varepsilon_1 + (A_\alpha(s)+1)\varepsilon_2)\prod_{t\in Y_\beta}(a_\alpha - a_\beta + (L_\alpha(t)+1)\varepsilon_1 - A_\beta(t)\varepsilon_2), \tag{0.16}$$

где $\vec{Y} = (Y_1, ..., Y_k)$, $\phi_s = a_\alpha + (i-1)\varepsilon_1 + (j-1)\varepsilon_2$ и $s = (i,j) \in Y_\alpha$, а $A_\alpha(s), L_\alpha(s)$ — рука и нога клетки $s = (i,j)$ диаграммы Y_α соответственно. То есть фактически мы видим, что знаменатель сокращается с частью числителя и полное выражение равно также некоторому произведению скобочек, но уже содержащих функции рук $A_\alpha(s)$ (arm) и ног $L_\alpha(s)$ (leg) диаграмм Юнга.

Для начала определим понятие руки и ноги диаграммы Юнга. Мы выбираем Английское соглашение для рисования разбиений $Y = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$. Например, разбиение $Y = (4,3,2,1,1)$ представляется как:



где число заполненных кружочков равно длине руки $A_Y(s)$, тогда как число пустых кружочков равно длине ноги $L_Y(s)$. Далее приведем пример вычисления рук и ног разных клеток диаграммы $Y = (5,3,2,1)$:



Как мы видим на правой картинке, клетка s может и не принадлежать самой диаграмме Y, но функции $A_Y(s)$ и $L_Y(s)$ определены.

[1] Напомним, что $\frac{1}{16\pi^2}\int d^4x \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}{}^*F_{\mu\nu}) = N$, а действие нашей теории есть $S_{\mathrm{YM}} = -\frac{1}{4g^2}\int d^4x \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu})$.

(a). Покажите, что доказательство равенства типа

$$\frac{\prod_n^N a_n}{\prod_m^M b_m} = \prod_k^{N-M} \lambda_k, \quad \text{или} \quad \sum_n^N \log a_n - \sum_m^M \log b_m = \sum_k^{N-M} \log \lambda_k, \tag{0.17}$$

эквивалентно доказательству равенства для функций:

$$\sum_n^N u^{a_n} - \sum_m^M u^{b_m} = \sum_k^{N-M} u^{\lambda_k}. \tag{0.18}$$

(Формула $\log x = -\lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^\infty \frac{d\eta}{\eta}(e^{-x\eta} - e^{-\eta})$ может быть полезна).

Определим функцию

$$V_\alpha(u_1, u_2) = \sum_{j=1}^{\lambda_{\alpha,1}} \sum_{i=1}^{\lambda'_{\alpha,j}} u_1^{1-i} u_2^{1-j} = \sum_{i=1}^{\lambda'_{\alpha,1}} \sum_{j=1}^{\lambda'_{\alpha,i}} u_1^{1-i} u_2^{1-j}, \tag{0.19}$$

где $\lambda_{\alpha,i}$ —длина строки с координатой i, диаграммы Y_α, а $\lambda'_{\alpha,j}$ — длина столбца с координатой j, диаграммы Y_α (Заметим, что $A_\alpha(s) = \lambda_{\alpha,i} - j$, и $L_\alpha(s) = \lambda'_{\alpha,j} - i$, $s = (i,j)$). Далее, введем по определению функцию $V_\alpha^*(u_1, u_2) \stackrel{\text{def}}{=} V_\alpha(1/u_1, 1/u_2)$.

(b). Покажите, что

$$\sum_{s \in Y_\alpha} \sum_{t \in Y_\beta} \left(u^{\varepsilon_1 + \phi_s - \phi_t} + u^{\varepsilon_2 + \phi_s - \phi_t} - u^{\phi_s - \phi_t} - u^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \phi_s - \phi_t} \right) =$$
$$= u^{a_\alpha - a_\beta}(u_1 + u_2 - 1 - u_1 u_2) V_\alpha^*(u_1, u_2) V_\beta(u_1, u_2), \tag{0.20}$$

где $u_1 = u^{\varepsilon_1}$ и $u_2 = u^{\varepsilon_2}$. Далее, определим функцию $\mathcal{N}_{\alpha,\beta}(u_1, u_2) \stackrel{\text{def}}{=} (u_1 + u_2 - 1 - u_1 u_2) V_\alpha^* V_\beta + V_\beta + u_1 u_2 V_\alpha^*$. Покажите, что эквивалентно доказательству тождества (0.16), нужно доказать, что

$$\mathcal{N}_{\alpha,\beta}(u_1, u_2) = \sum_{s \in Y_\alpha} (u_1^{-L_\beta(s)} u_2^{A_\alpha(s)+1}) + \sum_{t \in Y_\beta} (u_1^{L_\alpha(t)+1} u_2^{-A_\beta(t)}). \tag{0.21}$$

(c). Покажите, что

$$(u_1 + u_2 - 1 - u_1 u_2) V_\alpha^* V_\beta =$$
$$= \sum_{i=1}^{\lambda'_{\alpha,1}} \sum_{j=1}^{\lambda_{\beta,1}} \left(u_1^{i - \lambda'_{\beta,j}} u_2^{-j + \lambda_{\alpha,i} + 1} - u_1^i u_2^{-j+1} - (u_1^{i - \lambda'_{\beta,j}} - u_1^i) u_2^{-j+1} - u_1^i (u_2^{-j + \lambda_{\alpha,i+1}} - u_2^{-j+1}) \right). \tag{0.22}$$

(d). Покажите, что

$$\sum_{i=1}^{\lambda'_{\alpha,1}} \sum_{j=1}^{\lambda_{\beta,1}} (u_1^{i - \lambda'_{\beta,j}} - u_1^i) u_2^{-j+1} = \sum_{j=1}^{\lambda_{\beta,1}} \sum_{i=1}^{\lambda_{\beta,j}} (u_1^{1-i} - u_1^{\lambda'_{\alpha,1} - i + 1}) u_2^{-j+1} = V_\beta - \sum_{j=1}^{\lambda_{\beta,1}} \sum_{i=1}^{\lambda'_{\beta,j}} u_1^{\lambda'_{\alpha,1} - i + 1} u_2^{-j+1} \tag{0.23}$$

и аналогично, что

$$\sum_{i=1}^{\lambda'_{\alpha,1}} \sum_{j=1}^{\lambda_{\beta,1}} u_1^i (u_2^{-j + \lambda_{\alpha,i} + 1} - u_2^{-j+1}) = u_1 u_2 V_\alpha^* - \sum_{i=1}^{\lambda'_{\alpha,1}} \sum_{j=1}^{\lambda_{\alpha,i}} u_1^i u_2^{-\lambda_{\beta,1} + j}. \tag{0.24}$$

В итоге мы получаем, что

$$\mathcal{N}_{\alpha,\beta}(u_1,u_2)=\sum_{i=1}^{\lambda'_{\alpha,1}}\sum_{j=1}^{\lambda_{\beta,1}}\left(u_1^{i-\lambda'_{\beta,j}}u_2^{-j+\lambda_{\alpha,i}+1}-u_1^{i}u_2^{-j+1}\right)+\sum_{j=1}^{\lambda_{\beta,1}}\sum_{i=1}^{\lambda'_{\beta,j}}u_1^{\lambda'_{\alpha,1}-i+1}u_2^{-j+1}+\sum_{i=1}^{\lambda'_{\alpha,1}}\sum_{j=1}^{\lambda_{\alpha,i}}u_1^{i}u_2^{-\lambda_{\beta,1}+j}. \tag{0.25}$$

Теперь разложим $\mathcal{N}_{\alpha,\beta}(u_1,u_2)$ в сумму: $\mathcal{N}_{\alpha,\beta}(u_1,u_2)=\mathcal{N}^{>0}_{\alpha,\beta}(u_1,u_2)+\mathcal{N}^{\leqslant 0}_{\alpha,\beta}(u_1,u_2)$, где >0 и $\leqslant 0$ соответствует знаку степени u_2. Тогда

$$\mathcal{N}^{>0}_{\alpha,\beta}(u_1,u_2)=\sum_{i=1}^{\lambda'_{\alpha,1}}\sum_{j=1}^{\min(\lambda_{\beta,1},\lambda_{\alpha,i})}u_1^{i-\lambda'_{\beta,j}}u_2^{-j+\lambda_{\alpha,i}+1}+\sum_{i=1}^{\lambda'_{\alpha,1}}\sum_{j=1+\lambda_{\beta,1}}^{\lambda_{\alpha,i}}u_1^{i}u_2^{-\lambda_{\beta,1}+j}, \tag{0.26}$$

далее разобьем Y_α в сумму $Y_\alpha=Y_\alpha^\circ\oplus Y_\alpha^\bullet$, где $s\in Y_\alpha^\circ$, если $s\in Y_\alpha$, $j\leqslant\lambda_{\beta,1}$ и $s\in Y_\alpha^\bullet$, если $s\in Y_\alpha$, $j>\lambda_{\beta,1}$, тогда

(e). Покажите, что

$$\mathcal{N}^{>0}_{\alpha,\beta}(u_1,u_2)=\sum_{s\in Y_\alpha^\circ}u_1^{-L_\beta(s)}u_2^{A_\alpha(s)+1}+\sum_{s\in Y_\alpha^\bullet}u_1^{-L_\beta(s)}u_2^{A_\alpha(s)+1}=\sum_{s\in Y_\alpha}u_1^{-L_\beta(s)}u_2^{A_\alpha(s)+1}. \tag{0.27}$$

(f). Покажите, что

$$\mathcal{N}_{\alpha,\beta}(u_1,u_2)=\mathcal{N}_{\beta,\alpha}(\frac{1}{u_1},\frac{1}{u_2})u_1u_2, \tag{0.28}$$

откуда

$$\mathcal{N}_{\alpha,\beta}(u_1,u_2)=\sum_{i=1}^{\lambda'_{\beta,1}}\sum_{j=1}^{\lambda_{\alpha,1}}(u_1^{-i+\lambda'_{\alpha,j}+1}u_2^{j-\lambda_{\beta,i}}-u_1^{-i+1}u_2^{j})+\sum_{j=1}^{\lambda_{\alpha,1}}\sum_{i=1}^{\lambda'_{\alpha,j}}u_1^{-\lambda'_{\alpha,1}}u_2^{j}+\sum_{i=1}^{\lambda'_{\beta,1}}\sum_{j=1}^{\lambda_{\beta,i}}u_1^{-i+1}u_2^{\lambda_{\alpha,1}-j+1}. \tag{0.29}$$

(g). Аналогично, сделав разбиение $Y_\beta=Y_\beta^\circ\oplus Y_\beta^\bullet$, где $s\in Y_\beta^\circ$, если $s\in Y_\beta$, $j\leqslant\lambda_{\alpha,1}$ и $s\in Y_\beta^\bullet$, если $s\in Y_\beta$, $j>\lambda_{\alpha,1}$, покажите, что

$$\mathcal{N}^{\leqslant 0}_{\alpha,\beta}(u_1,u_2)=\sum_{t\in Y_\beta}u_1^{L_\alpha(t)+1}u_2^{-A_\beta(t)}. \tag{0.30}$$

В результате мы и доказываем (0.21) и следовательно наше изначальное тождество (0.16).