Листок 7. Конспект лекций с упражнениями[1]

(Сканы решений данных упражнений принимаются до: **15.12.14**
на e-mail: hetzif@yandex.ru)

1 Определения и факты

1.1 Симплектическое многообразие (вещественное или комплексное)

Определение: Симплектическим многообразием называется многообразие M на котором задана скобка Пуассона. Для двух функций $f(x)$ и $g(x)$ на многообразии M скобка Пуассона определяется как

$$\{f(x), g(x)\} = \omega^{\mu\nu}(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial g(x)}{\partial x^\nu}, \tag{1.1}$$

где $\omega^{\mu\nu}(x) = -\omega^{\nu\mu}(x)$. Также $\omega^{\mu\nu}$ не вырождена и такая, что выполняется тождество Якоби:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \tag{1.2}$$

Так как $\omega^{\mu\nu}(x)$ не вырождена, то существует обратная матрица $\omega_{\mu\nu}(x)$ — симплектичекская 2-форма $\omega = \omega_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu$, где $\omega_{\mu\sigma}\omega^{\sigma\nu} = \delta^\nu_\mu$. Тождество Якоби приводит к тому, что $\omega = \omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ является замкнутой: $d\omega = 0$ [2].

Упражнение 1: Покажите, что условие замкнутости симплектической 2-формы $\omega = \omega_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu$ эквивалентно выполнению тождества Якоби для $\omega^{\mu\nu}(x)$.

1.2 Комплексное многообразие

Определение: Пусть M есть $2n$-мерное вещественное многообразие с локальными координатами $\{x^i\}$, $i = 1, ..., 2n$. Пусть на многообразии M есть тензор $\hat{I}^j_i(x)$, со свойством $\hat{I}^2(x) = -1$. Такой тензор называется почти комплексной структурой. В касательном пространстве TM_x каждой точки x можно ввести подпространства TM^+ и TM^-, так, что если $V^\pm \in TM^\pm$, то $\hat{I}V^\pm = \pm i V^\pm$. В локальных координата подпространства $V^\pm$ можно представить как $V^\pm = V^i \mathcal{D}^\pm_i$, где

$$\mathcal{D}^\pm_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \mp i \hat{I}^j_i(x) \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{1.3}$$

Почти комплексная структура становится комплексной структурой, если

$$[\mathcal{D}^+_i, \mathcal{D}^+_j] = A^k_{ij} \mathcal{D}^+_k. \tag{1.4}$$

Упражнение 2: Покажите, что из (1.4) следует дополнительное условие на тензор $\hat{I}^j_i(x)$ вида:

$$\hat{I}^k_i (\partial_l \hat{I}^k_j - \partial_j \hat{I}^k_l) - \hat{I}^l_j (\partial_l \hat{I}^k_i - \partial_i \hat{I}^k_l) = 0, \tag{1.5}$$

где $\partial_i = \partial / \partial x^i$.

[1] Для справки смотрите статью [1].

[2] Напомним, что $d\omega = \frac{\partial \omega_{\mu_1 \dots \mu_n}}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_n}$, где $\omega = \omega_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge .... \wedge dx^{\mu_n}$, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Тогда если $X, Y \in V^+$, то $[X, Y] \in V^{+}$ [3].

Упражнение 3: Покажите, что условие (1.5) на тензор $\hat{I}(x)$ можно также записать в виде

$$[\hat{I}X, \hat{I}Y] - [X, Y] - \hat{I}[X, \hat{I}Y] - \hat{I}[\hat{I}X, Y] = 0. \tag{1.6}$$

Итак, если это выполнено, то существует n независимых комплексных функций

$$z^\alpha(x^1, ..., x^{2n}), \quad \alpha = 1, ..., n, \tag{1.7}$$

где $z^\alpha(x^1, ..., x^{2n})$ — решения уравнений

$$\mathcal{D}_i^- z^\alpha(x^1, ..., x^{2n}) = 0, \quad i = 1, ..., 2n. \tag{1.8}$$

Перейдя от $\{x^i\}$ к $\{z^\alpha\}$ мы выбираем базис в T^+ вида $\partial/\partial z^i$, а в T^- вида $\partial/\partial \bar{z}^i$.

Упражнение 4: Покажите, что (1.6) совместно с (1.8).

1.3 Комплексное многообразие с эрмитовой метрикой

Определение: Эрмитова метрика — это метрика $g(X, Y)$, где X и Y касательные вектора комплексного многообразия M, которая удовлетворяет свойству

$$g(X, Y) = g(\hat{I}X, \hat{I}Y), \tag{1.9}$$

где $\hat{I}_i^j(x)$ — тензор, определяющий комплексную структуру, то есть удовлетворяющий свойству $\hat{I}^2(x) = -1$ и

$$[\hat{I}X, \hat{I}Y] - [X, Y] - \hat{I}[X, \hat{I}Y] - \hat{I}[\hat{I}X, Y] = 0, \tag{1.10}$$

для любых касательных векторов X и Y.

В базисе $\{\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\}$ мы получим следующие скалярные произведения:

$$\Big(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\Big) = g_{i\bar{j}}, \quad \Big(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\Big) = \Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\Big) = g_{ij} = g_{\bar{i}\bar{j}} = 0, \tag{1.11}$$

то есть можно написать

$$g = g_{i\bar{j}}(z, \bar{z}) dz^i d\bar{z}^j. \tag{1.12}$$

Упражнение 5: Проверьте (1.11)

Далее мы определяем фундаментальную 2-форму как:

$$\omega(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} g(\hat{I}X, Y), \tag{1.13}$$

что можеь быть записано в виде

$$\omega = i g_{i\bar{j}}(z, \bar{z}) dz^i \wedge d\bar{z}^j. \tag{1.14}$$

Упражнение 6: Проверьте (1.14).

[3] Коммутатор двух векторных полей $X = X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ и $Y = Y^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$, определяется как $[X, Y] = \big(X^k \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} - Y^k \frac{\partial X^i}{\partial x^k}\big)\frac{\partial}{\partial x^i}$.

1.4 Кэлерово многообразие

Определение: Кэлерово многообразие — это комплексное многообразие с эрмитовой метрикой и замкнутой 2-формой:

$$d\omega = 0, \tag{1.15}$$

где $\omega(X,Y) \overset{\text{def}}{=} g(\hat{I}X, Y)$ и соответственно $g(X,Y) = g(\hat{I}X, \hat{I}Y)$.

Упражнение 7: Проверьте, что условие замкнутости 2-формы равносильно следующему условию на комплексную структуру:

$$\nabla_i \hat{I} = 0, \tag{1.16}$$

где ∇_i — ковариантная производная, определенная по метрике[4] (эрмитовой метрике g).

В голоморфных координатах метрику можно привести к виду:

$$g_{i\bar{j}}(z,\bar{z}) = \frac{\partial}{\partial z^i}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\mathcal{K}(z,\bar{z}), \tag{1.17}$$

где $\mathcal{K}(z,\bar{z})$ — Кэлеров потенциал.

Упражнение 8: Выведите локально (1.17), используя замкнутость 2-формы: $d\omega = 0$.

1.5 Гипер-Кэлерово многообразие

Определение: Гипер-Кэлерово многообразие – это комплексное многообразие M вещественной размерности $\dim M = 4n$, с тремя независимыми комплексными структурами $\hat{I}^a$, $a = 1,2,3$, удовлетворяющими соотношению

$$\hat{I}^a \hat{I}^b = -\delta^{ab} + \varepsilon^{abc}\hat{I}^c, \tag{1.18}$$

с эрмитовой метрикой $g(X,Y)$, для которой выполнено

$$g(\hat{I}^a X, \hat{I}^a Y) = g(X,Y), \quad a = 1,2,3, \tag{1.19}$$

и условием на комплексные структуры

$$\nabla_i \hat{I}^a = 0, \quad a = 1,2,3, \tag{1.20}$$

где ковариантная производная ∇_i ассоциирована с эрмитовой метрикой g. А также с тремя симплектическими формами ω^a, $a = 1,2,3$, определенными по одной и той же метрике g, как:

$$\omega^a(X,Y) \overset{\text{def}}{=} g(\hat{I}^a X, Y). \tag{1.21}$$

Пример: Евклидово $(4N^2 + 4Nk)$-мерное Гипер-Кэлерово многообразие $\mathcal{A}$.

[4]Напомним, что $\nabla_k \hat{I}_i^j(x) = \partial_k \hat{I}_i^j(x) + \Gamma_{kl}^j(x)\hat{I}_i^l(x) - \Gamma_{ki}^l(x)\hat{I}_l^j(x)$, где $\Gamma_{ij}^k(x) = \frac{1}{2}g^{km}(\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij})$.

Координаты на $\mathcal{A}$ есть $(B_1)_{ij}, (B_2)_{ij}, I_{i\alpha}, J_{\alpha i}$, где $i, j = 1, ..., N$, $\alpha = 1, ..., k$. Комплексные структуры $\hat{I}^a$, $a = 1, 2, 3$, действуют на матрицы B_1, B_2, I, J как

$$\begin{aligned} \hat{I}^1 &: (B_1, B_2, I, J) \to (iB_2^\dagger, iB_1^\dagger, iJ^\dagger, -iI^\dagger) \\ \hat{I}^2 &: (B_1, B_2, I, J) \to (B_2^\dagger, -B_1^\dagger, J^\dagger, -I^\dagger) \\ \hat{I}^3 &: (B_1, B_2, I, J) \to (iB_1, iB_2, iI, iJ) \end{aligned} \tag{1.22}$$

и

$$\hat{I}^a \hat{I}^b = -\delta^{ab} + \varepsilon^{abc} \hat{I}^c. \tag{1.23}$$

Таким образом координаты B_1, B_2, I, J являются голоморфными относительно третьей комплексной структуры $\hat{I}^3$.

Упражнение 9: Проверьте, что из (1.22) следует (1.23).

Далее мы определяем метрику на матрицах $\mathcal{A} = (B_1, B_2, I, J)$, как

$$g(d\mathcal{A}, d\mathcal{A}) = \mathrm{Tr}(dB_1 dB_1^\dagger + dB_2 dB_2^\dagger + dI dI^\dagger + dJ^\dagger dJ), \tag{1.24}$$

откуда находятся три симплектические формы:

$$\begin{aligned} \omega^3 \quad\quad &= \mathrm{Tr}[dB_1 \wedge dB_1^\dagger + dB_2 \wedge dB_2^\dagger + dI \wedge dI^\dagger + dJ^\dagger \wedge dJ], \\ \omega^1 + i\omega^2 &= \mathrm{Tr}[dB_1 \wedge dB_2 + dI \wedge dJ], \end{aligned} \tag{1.25}$$

Упражнение 10: Получите (1.25) используя выражение для метрики (1.24).

Также из метрики можно получить инвариантную форму объема Ω:

$$\Omega = \prod_{i,j} (dB_1)_{ij} (dB_1^\dagger)_{ij} (dB_2)_{ij} (dB_2^\dagger)_{ij} \prod_{i,\alpha} dI_{i\alpha} dI^\dagger_{\alpha i} dJ^\dagger_{i\alpha} dJ_{\alpha i}. \tag{1.26}$$

Упражнение 11: Покажите, что $\Omega = (\omega^3)^{2N(N+k)}$, где $(\omega^3)^{2N(N+k)} = \omega^3 \wedge .... \wedge \omega^3$.

Упражнение 12: Проверьте, что $\nabla_i \hat{I}^a = 0$ для $a = 1, 2, 3$.

Упражнение 13: Покажите, что ω^a, $g(d\mathcal{A}, d\mathcal{A})$ и Ω инвариантны относительно трех комплексных структур $\hat{I}^a$, $a = 1, 2, 3$.

Далее очевидно, что $d\omega^a = 0$, поскольку ω^a_{ij} не зависит от координат и есть просто константа. Таким образом $\mathcal{A}$ — Гипер-Кэлерово многообразие. Оно похоже на пространство модулей инстантонов, но это еще не оно.

1.6 Кэлерова редукция

Цель Кэлеровой редукции получить из одного Кэлерова многообразия другое Кэлерово многообразие. Пусть M — Кэлерово многообразие с координатами $\{x^i\}$, $i = 1, ..., 2n$, с комплексной структурой $\hat{I}$, эрмитовой метрикой g и замкнутой 2-формой ω. Пусть на M действует компактная группа Ли G, которая сохраняет метрику и комплексную структуру

$$\mathcal{L}_{X_r} \hat{I} = \mathcal{L}_{X_r} g = 0, \tag{1.27}$$

где касательные вектора $X_r(x)$ на M соответствуют генераторам T_r ($r = 1, 2, ..., \dim G$) алгебры Ли g группы Ли G:

$$f(Gx) = f((1 + T_r)x) = f(x + X_r(x)) = f(x) + X_r^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i} + ... \tag{1.28}$$

Из уравнений (1.27) следует, что и сохраняется симплектическая форма ω:

$$\mathcal{L}_{X_r}\omega \stackrel{\text{def}}{=} X_r^k \partial_k \omega_{ij} + \frac{\partial X_r^k}{\partial x_i}\omega_{kj} + \frac{\partial X_r^k}{\partial x^j}\omega_{ik} = 0, \tag{1.29}$$

Упражнение 14: Проверьте, что из (1.27) следует (1.29).

Далее используя то, что $\mathcal{L}_V = i_V d + d i_V$, мы получим[5]

$$\mathcal{L}_{X_r}\omega = i_{X_r} d\omega + d(i_{X_r}\omega) = d(i_{X_r}\omega) = 0, \tag{1.30}$$

следовательно можно написать[6]

$$i_{X_r}\omega(x) = d\mathcal{H}_r(x), \tag{1.31}$$

где функция $\mathcal{H}_r(x)$ на M — называется Гамильтонианом. Выражение (1.31) можно записать также в виде

$$\frac{\partial \mathcal{H}_r(x)}{\partial x^i} = X_r^j(x)\omega_{ij}(x), \tag{1.32}$$

или в виде

$$\delta_r x^i \equiv X_r^i(x) = \{x^i, \mathcal{H}_r(x)\} = \omega_{ij}(x)\frac{\partial \mathcal{H}_r(x)}{\partial x^j}. \tag{1.33}$$

Гамильтониан $\mathcal{H}_{X_r} \equiv \mathcal{H}_r$ определяется с точностью до константы, которую можно фиксировать требованием

$$X\mathcal{H}_Y = \mathcal{H}_{[X,Y]}, \tag{1.34}$$

или эквивалентное

Утверждение : Гамильтонианы $\mathcal{H}_r$ можно выбрать так (фиксировать константы), чтобы

$$\{\mathcal{H}_X, \mathcal{H}_Y\} = \mathcal{H}_{[X,Y]}. \tag{1.35}$$

Такие Гамильтонианы называются отображением моментов.

Далее определим отображение из Кэлерова многообразия M в алгебру Ли g: $\mu : M \to g$, как

$$\mu(x) = \sum_{r=1}^{\dim G} \mathcal{H}_r(x) T^r \in g. \tag{1.36}$$

[5] Напомним, что $i_V\omega = nV^\mu \omega_{\mu\mu_1...\mu_{n-1}} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_{n-1}}$, где $\omega = \omega_{\mu_1...\mu_n} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_n}$.

[6] Мы предполагаем, что наше многообразие таково, что замкнутые 1-формы являются точными или, что то же самое — первые когомологии отсутствуют.

Определение : Кэлерова редукция (Kähler quotient) это редукция Кэлерова многообразия M в Кэлерово многообразие $\tilde{M}$:

$$\tilde{M} = \mu^{-1}(0)/G = \prod_{r=1}^{\dim G} \mathcal{H}_r^{-1}(0)/G, \tag{1.37}$$

которая состоить из двух шагов:

Шаг 1. Определяем подпространство $N \in M$, состоящее из $x \in M$, удовлетворяющих $\mathcal{H}_r(x) = 0$, для $r = 1, ..., \dim G$.

Шаг 2. M есть фактор пространство N по действию группы G. Если группа G действует на N свободно, то

$$\dim \tilde{M} = \dim M - 2 \dim G. \tag{1.38}$$

Главное утверждение: $\tilde{M}$ является Кэлеровым многообразием и наследует метрику, комплексную структуру и связность от M.

Рассмотрим касательное к N пространство TN, где $N = \{x \in M,\ \mathcal{H}_1(x) = 0, ..., \mathcal{H}_{\dim G}(x) = 0\}$.

Упражнение 15: Покажите, что вектора X_r $(r = 1, ..., \dim G)$ принадлежат TN, то есть группа G действует на N, не выводя из него.

Введем следующие определения:

Определение 1 : Подпространство в TN натянутое на вектора X_r, с $r = 1, ..., \dim G$, называется вертикальным подпространством и обозначается за $V = \{X_1, ..., X_{\dim G}\}$.

Определение 2 : Подпространство в TN состоящее из векторов X_H, которые ортогональны всем векторам X_r, с $r = 1, ..., \dim G$ (то есть $g(X_H, X_r) = 0$), назовем горизонтальным подпространством H.

Таким образом мы получили, что $TN = H \oplus V$, где $V = \{X_1, ..., X_{\dim G}\}$, а $H = \{X_H\}$ и $X_H \perp X_r$, то есть $g(X_H, X_r) = 0$.

Утверждение: Если вектор $X \in TN$, то $X \perp \hat{I} X_r$.

Доказательство : Возьмем произвольный вектор $X \in TN$, тогда

$$g(\hat{I} X_r, X) = \omega(X_r, X) = \omega_{ij} X_r^i X^j = X^j \frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial x^j} = 0, \tag{1.39}$$

где самое последнее равенство нулю следует из того, что так как вектор X принадлежит TN, то он не выводит из пространства N, то есть не меняет условия $\mathcal{H}_r(x) = 0$.

Далее касательное пространство $T\tilde{M}$ есть по определению $T\tilde{M} \stackrel{\text{def}}{=} TN/V$, то есть касательный вектор $X \in T\tilde{M}$ имеет единственное горизонтальное представление в H. Отсюда мы определяем метрику $\tilde{g}$ и симплектическую форму $\tilde{\omega}$ на $\tilde{M}$:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(X, Y) &= g(X_H, Y_H), \\ \tilde{\omega}(X, Y) &= \omega(X_H, Y_H), \end{aligned} \tag{1.40}$$

где $X, Y \in T\tilde{M}$ и $X_H, Y_H \in H$.

1.7 Гипер-Кэлерова редукция

Пусть M — Гипер-Кэлерово многообразие с $(\hat{I}^a, g, \omega^a)$, $a = 1,2,3$ размерности $\dim M = 4n$, где $\hat{I}^a$ есть три инвариантные комплексные структуры:

$$\hat{I}^a \hat{I}^b = -\delta^{ab} + \varepsilon^{abc} \hat{I}^c, \tag{1.41}$$

далее g — эрмитова метрика:

$$g(\hat{I}^a X, \hat{I}^a Y) = g(X, Y), \tag{1.42}$$

и ω^a замкнутые 2-формы: $\omega^a(X,Y) = g(\hat{I}^a X, Y)$ и $d\omega^a = 0$ (напомним, что условие замнутости эквивалентно условию $\nabla_i \hat{I}^a = 0$).

Пусть на M действует группа Ли G и сохраняет g и $\hat{I}^a$ для $a = 1,2,3$. Этим симметриям соответствуют поля:

$$X_r(x) = X_r^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad r = 1, ..., \dim G. \tag{1.43}$$

Далее аналогично Кэлеровой редукции, из условия $\mathcal{L}_{X_r} \omega^a = 0$ следует, что существуют Гамильтонианы $\mathcal{H}_r^a$, $a = 1,2,3$, $r = 1,..,\dim G$, такие, что

$$\frac{\partial \mathcal{H}_r^a(x)}{\partial x^\mu} = \omega^a_{\mu\nu}(x) X_r^\nu(x) \tag{1.44}$$

или в эквивалентном виде

$$X_r^\mu(x) = (\omega^a)^{\mu\nu}(x) \frac{\partial \mathcal{H}_r^a(x)}{\partial x^\nu}, \tag{1.45}$$

тогда

Определение : Гипер-Кэлерова редукция — это многообразием $\tilde{M}$ вида

$$\tilde{M} = N/G, \quad \text{где} \quad N = \{x \in M,\ \mathcal{H}_r^a(x) = 0,\ a = 1,2,3,\ r = 1,..,\dim G\} \tag{1.46}$$

и размерности $\dim \tilde{M} = \dim M - 4 \dim G$.

Упражнение 16: Проведите аналогичные рассуждения, которые были сделаны для Кэлеровой редукции.

Заметим, что $g(\hat{I}^a X_r, \hat{I}^b X_s) = -\varepsilon^{abc} g(X_r, \hat{I}^c X_s) = 0$, если $a \neq b$. Теперь если $X \in H$, то

$$X \perp X_r, \hat{I}^a X_r, \quad X_r \perp \hat{I}^a X_s, \quad \hat{I}^a X_r \perp \hat{I}^b X_s, \tag{1.47}$$

для всех $r, s = 1, ..., \dim G$. Таким образом мы имеем 5 ортогональных подпространств в касательном пространстве TM. При этом $g(X_r, X_s) = g(\hat{I}^a X_r, \hat{I}^a X_s)$. В результате метрика g разбивается в 5 слагаемых, а форма объема Ω в 5 сомножителей. Причем детерминанты последних четырех равны друг другу.

1.8 Пример: Гипер-Кэлерова структура на пространстве связностей A_μ неабелевой теории Янга-Миллса с группой $U(N)$.

Рассмотрим пространство связностей неабелевой теории Янга-Миллса $\{A_\mu\}$. Метрика на этом пространстве может быть определена как

$$g(\delta A_\mu, \delta A_\mu) = \int \mathrm{Tr}(\delta A_\mu)^2 d^4x. \tag{1.48}$$

Упражнение 17: Проверьте, что такая метрика инвариантна относительно калибровочных преобразований.

Каждой комплексной структуре $\hat{I}^a$ на $\mathbb{R}^4$:

$$\hat{I}^a : \frac{\partial}{\partial x^\mu} \to (\hat{I}^a)^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{1.49}$$

соответствуют голоморфные координаты:

$$\begin{aligned}
\hat{I}^1 : &\quad z^1_{(1)} = x^1 + ix^2, \quad z^2_{(1)} = x^3 + ix^4 \\
\hat{I}^2 : &\quad z^1_{(2)} = x^1 + ix^3, \quad z^2_{(2)} = x^2 - ix^4 \\
\hat{I}^3 : &\quad z^1_{(3)} = x^1 - ix^4, \quad z^2_{(3)} = x^2 + ix^3
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Упражнение 18: Покажите, что такие $\hat{I}^a$ удовлетворяют соотношению:

$$\hat{I}^a \hat{I}^b = -\delta^{ab} + \varepsilon^{abc} \hat{I}^c. \tag{1.51}$$

Постройте эрмитову метрику на $\mathbb{R}^4$ и выпишите все голоморфные 2-формы, напишите их также в обычных координатах (x^1, x^2, x^3, x^4).

Реализация $\hat{I}^1, \hat{I}^2, \hat{I}^3$ матрицами 4×4 записывается как:

$$\hat{I}^1 = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & i\sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{I}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{I}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.52}$$

где матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.53}$$

или это можно записать в явном виде

$$\hat{I}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{I}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{I}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.54}$$

Далее соответствующие комплексные структуры на A_μ:

$$\hat{I}^a : \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \to (\hat{I}^a)^\nu_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}, \tag{1.55}$$

приводят к голоморфным координатам вида:

$$\begin{aligned}\hat{I}^1: &\quad A_{z_1} = A_1 + iA_2, \quad A_{z_2} = A_3 + iA_4\\ \hat{I}^2: &\quad A_{z_1} = A_1 + iA_3, \quad A_{z_2} = A_2 - iA_4\\ \hat{I}^3: &\quad A_{z_1} = A_1 - iA_4, \quad A_{z_2} = A_2 + iA_3.\end{aligned} \tag{1.56}$$

Метрика g является эрмитовой относительно каждой из $\hat{I}^a$, например для $\hat{I}^1$:

$$g(\delta A, \delta A) = \int \mathrm{Tr}(\delta A_{z_1}\delta A_{\bar{z}_1} + \delta A_{z_2}\delta A_{\bar{z}_2})d^4x. \tag{1.57}$$

Упражнение 19: Проверьте эрмитовость метрики g и напишите вид метрик для оставшихся комплексных структур.

Каждой $\hat{I}^a$ соответствует комплексная 2-форма ω^a, например:

$$\omega^1(\delta A, \delta A) = \int \mathrm{Tr}(\delta A_{z_1} \wedge \delta A_{\bar{z}_1} + \delta A_{z_2} \wedge \delta A_{\bar{z}_2})d^4x. \tag{1.58}$$

Упражнение 20: Напишите выражения для форм ω^2 и ω^3.

На пространстве связностей $\{A_\mu\}$ действует группа калибровочных преобразованией. Это действие можно записать как

$$A_\mu \to U^\dagger A_\mu U + U^\dagger \partial_\mu U. \tag{1.59}$$

Рассмотрим бесконечно малые калибровочные преобразования $U = 1 + h$, где $h^\dagger = -h$, тогда мы получим

$$\delta_h A_\mu(x) = \nabla_\mu h, \tag{1.60}$$

где $\nabla_\mu h = \partial_\mu h + [A_\mu, h]$. Такое действие является Гамильтоновым относительно комплексной формы:

$$\delta_\omega A_\mu(x) = \nabla_\mu h = \{A_\mu(x), \mathcal{H}^a_h\}_a, \tag{1.61}$$

для всех $a = 1, 2, 3$ [7], где

$$\mathcal{H}^a_\omega = \int \mathrm{Tr}(h(x)\mathcal{H}^a(x))d^4x, \tag{1.62}$$

где $a = 1, 2, 3$ и

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1(x) \quad\quad &= F_{z_1\bar{z}_1} + F_{z_2\bar{z}_2},\\ \mathcal{H}_2(x) - i\mathcal{H}_3 &= F_{z_1 z_2}.\end{aligned} \tag{1.63}$$

Упражнение 21: Выведите (1.63) и проверьте, что действительно выполняется равенство (1.61).

Упражнение 22: Покажите, что Гипер-Кэлерова редукция по группе калибровочных преобразований приводит к пространтсву модулей инстантонов, то есть решений уравнения $F_{\mu\nu} = {}^*F_{\mu\nu}$, профакторизованных по модулю калибровочных преобразований.

[7] Не подумайте, что в формуле (1.61) есть суммирование по индексу a, имеется ввиду, что эта формула верна для каждого $a = 1, 2, 3$, также $\{\ \}_a$ — скобка Пуассона с формой ω^a, которая была определена в самом начале этого листка.

2 Пространство модулей суперинстантонов

Рассмотрим уравнение Вейля в поле инстантона для нулевых мод:

$$\bar{\sigma}_\mu \nabla_\mu \lambda^\alpha = 0 \tag{2.1}$$

где $\bar{\sigma}_\mu = (1, -i\vec{\sigma})$ и $\lambda^\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ и λ^α — Вейлевский спинор, который преобразуется по представлению $(\frac{1}{2}, 0)$ группы Лоренца. Пусть $\Delta(x) = A + \hat{x}Q$, где A и Q матрицы $2N \times (2N+k)$:

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & I \\ -B_2^\dagger & B_1^\dagger & -J^\dagger \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Если

$$\Delta(x)\Delta^\dagger(x) = \begin{pmatrix} F^{-1}(x) & 0 \\ 0 & F^{-1}(x) \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

где $F(x)$ матрица $N \times N$, то решение уравнений самодуальности есть

$$A_\mu(x) = U(x)\partial_\mu U^\dagger(x), \tag{2.4}$$

где $U(x)\Delta^\dagger(x) + \Delta(x)U^\dagger(x) = 0$ и $U(x)$ матрица $k \times (2N+k)$.

Будем искать решение $\bar{\sigma}_\mu \nabla_\mu \lambda^\alpha = 0$ в виде $((\lambda^\alpha)^\dagger = -\lambda^\alpha)$:

$$\lambda_\alpha(x) = U(x)MF(x)Q_\alpha U^\dagger(x) - U(x)Q_\alpha F(x)\tilde{M}U^\dagger(x). \tag{2.5}$$

Можно показать, что λ_α — решение, если $M = (M_1, M_2, \mu)$ и $\tilde{M} = (M_2, -M_1, \nu)$, где $M = M_1, M_2$ — Грассмановы $N \times N$ матрицы, а μ — $N \times k$ и ν — $k \times N$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} [M_1, B_2] + [B_1, M_2] + I\nu + \mu J = 0, \\ [M_1, B_1^\dagger] + [M_2, B_2^\dagger] + \mu I^\dagger - J^\dagger \nu = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Упражнение 23: Выведите (2.6), используя анзатц (2.5).

Число нулевых мод Вейлевских фермионов равно $4Nk$. А уравнения на них имеют форму уравнений на горизонтальное представление касательных векторов TM. Матрицы (M_1, M_2, μ, ν) вместе с (B_1, B_2, I, J) образуют пространство супермодулей.

2.1 Гипер-Кэлерова редукция и пространство модулей инстантонов $M_{N,k}$.

На нашем Евклидовом $(4N^2 + 4Nk)$-мерном Гипер-Кэлеровом многообразии $\mathcal{A} = (B_1, B_2, I, J)$ (см. Пример на стр. 3) можно ввести следующие три симплектические 2-формы ω^a:

$$\begin{aligned} \omega^3 \quad &= \mathrm{Tr}[dB_1 \wedge dB_1^\dagger + dB_2 \wedge dB_2^\dagger + dI \wedge dI^\dagger + dJ^\dagger \wedge dJ], \\ \omega^1 + i\omega^2 &= \mathrm{Tr}[dB_1 \wedge dB_2 + dI \wedge dJ]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

На этом пространстве действует группа Ли $U(N)$, как

$$B_1 \to U^\dagger B_1 U, \quad B_2 \to U^\dagger B_2 U, \quad I \to U^\dagger I, \quad J \to JU, \tag{2.8}$$

где $U \in U(N)$. Обозначим генераторы группы $U(N)$ как h, где $U = 1 + h$ и $h^\dagger = -h$.

Упражнение 24: Найдите $\hat{\mathcal{H}}^1, \hat{\mathcal{H}}^2, \hat{\mathcal{H}}^3$, покажите, что

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}^1 \qquad &= [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J, \\ \hat{\mathcal{H}}^2 + i\hat{\mathcal{H}}^3 &= [B_1, B_2] + IJ. \end{aligned} \tag{2.9}$$

То есть мы видим, что это приводит нас к АДХМ уравнениям.

Далее определим следующие функции:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_h^1 \qquad &= \mathrm{Tr}(h\mathcal{H}^1), \\ \mathcal{H}_h^2 + i\mathcal{H}_h^3 &= \mathrm{Tr}\big(h(\mathcal{H}^2 + i\mathcal{H}^3)\big). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Упражнение 25: Проверьте, что действие группы $U(N)$ на $\mathcal{A}$ гамильтоново, а именно, что

$$\delta_h B_1 = \{B_1, \mathcal{H}_h^a\}_a, \quad \delta_h B_2 = \{B_2, \mathcal{H}_h^a\}_a, \quad \delta_h I = \{I, \mathcal{H}_h^a\}_a, \quad \delta_h J = \{J, \mathcal{H}_h^a\}_a, \tag{2.11}$$

для $a = 1, 2, 3$ и где $\delta_h B_1 = [B_1, h]$, $\delta_h B_2 = [B_2, h]$ и $\delta_h I = -hI$, $\delta_h J = Jh$.

Итак, мы видим, что пространство модулей инстантонов $M_{N,k}$ это Гипер-Кэлерова редукция $\mathcal{A}$ по $U(N)$.

Список литературы

[1] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindstrom, and M. Rocek, *Hyper-Kähler metrics and supersymmetry*, Comm. Math. Phys. Volume 108, Number 4 (1987), 535-589.