Листок 3

Задача 3.1. Опишите все возможные сигма-алгебры на конечном множестве X.

Задача 3.2. *Борелевской* сигма-алгеброй называется минимальная (по включению) сигма-алгебра, содержащая все открытые множества. Докажите, что борелевская сигма-алгебра на $\mathbb{R}$ содержит все замкнутые множества, все полуинтервалы $(a;b]$ и множество всех рациональных чисел.

Задача 3.3. Докажите, что существует подмножество отрезка $[0;1]$, не принадлежащее борелевской сигма-алгебре.

Задача 3.4. Докажите, что не существует бесконечных сигма-алгебр, состоящих из счетного числа множеств.

Задача 3.5. Докажите, что любая непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима.

Говорят, что на пространстве X с заданной сигма-алгеброй $\mathcal{F}$ определена мера P, если каждому $A \in \mathcal{F}$ сопоставлено число $0 \leq P(A) \leq \infty$, так что выполняется следующее условие: для попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots$ мы имеем

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Мера называется *вероятностной*, если $P(X) = 1$.

Задача 3.6. Опишите все вероятностные меры на конечном пространстве X с сигма-алгеброй, составленной из всех подмножеств.

Пусть P_n, $n \geq 1$, и P — вероятностные меры на $\mathbb{R}$. Говорят, что последовательность $\{P_n\}$ *слабо сходится* к мере P, если для любой непрерывной ограниченной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выполнено

$$\int_{\mathbb{R}} f dP_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f dP.$$

Задача 3.7. Докажите, что последовательность мер $\delta(1/n)$ слабо сходится к мере $\delta(0)$.

Задача 3.8. Найдите предел последовательности мер $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \delta\left(\frac{i}{n}\right)$.

Задача 3.9. Найдите предел последовательности мер $P_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta\left(\{\sqrt{2}n\}\right)$.

Задача 3.10. Пусть P_n слабо сходится к P, и пусть A — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}$. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} P_n(A) \leq P(A)$. Приведите пример, когда неравенство строгое.

Задача 3.11. Обозначим символом ∂A границу множества A. Докажите, что для любого A, такого что $P(\partial A) = 0$, выполнено

$$\lim_{N\to\infty} P_n(A) = P(A).$$

В обратную сторону, докажите, что если это условие выполнено, то последовательность мер P_n слабо сходится к P.

Задача 3.12. Пусть $T : [0;1) \to [0;1)$ определяется формулами $T(x) = \{\frac{1}{x}\}$ при $x \neq 0$, и $T(0) = 0$. Докажите, что *мера Гаусса*

$$P(A) = \frac{1}{\ln 2}\int_A \frac{dx}{1+x}$$

является инвариантной для преобразования T.