Листок 4

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — пространство Ω с заданной на нем σ-алгеброй $\mathcal{F}$ и мерой P, такой что $P(\Omega) = 1$. Пусть $T : \Omega \to \Omega$ — эргодическое преобразование. Пусть задана интегрируемая функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$, и обозначим символом a ее математическое ожидание: $a = \int f(x)dP(x)$. Простой вариант эргодической теоремы может быть сформулирован следующим образом

Эргодическая теорема. Для почти всех точек $w \in \Omega$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k w) = a.$$

Доказательство эргодической теоремы можно найти в многих книгах, например, в П. Р. Халмош, "Лекции по эргодической теории" или в П. Биллингслей, "Эргодическая теория и информация".

Задача 4.1. Докажите, что для любого $A \in \mathcal{F}$ почти любая точка x попадает в A с асимптотической частотой $P(A)$ (это означает, что среди точек $\{x, Tx, T^2x, \dots, T^n x\}$ доля тех, которые принадлежат A, стремится к $P(A)$).

Задача 4.2. Число $x \in [0;1)$ называется *нормальным по основанию 2*, если в его двоичной записи $0.a_1a_2a_3\dots$ доля единиц среди первых n знаков стремится к $1/2$ при $n \to \infty$. Докажите, что почти все числа нормальны по основанию 2.

Задача 4.3. Число $x \in [0;1)$ называется *нормальным по основанию k*, если доля любой "цифры" в его k-ичной записи стремится к 1/k. Число $x \in [0;1)$ называется *нормальным*, если оно нормально по любому основанию. Докажите, что почти все числа нормальны.

Задача 4.4. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \{2^k x\} = \frac{1}{2}, \qquad \text{для почти всех } x.$$

Задача 4.5. Пусть $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ — измеримая функция, и $f(x) > 0$ для всех x. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Найдите предел $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\{x + k\alpha\})$ для различных α.

Последовательность чисел $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, $a_i \in [0,1)$, называется *равномерно распределенной*, если для любого интервала (a,b) доля точек из последовательности, лежащих в этом интервале, стремится к $b - a$.

Задача 4.6. Докажите, что при иррациональном α для любого $x \in [0,1)$ последовательность $\{x + n\alpha\}$ равномерно распределена.

Задача 4.7. Пусть A_n — первая цифра числа 2^n (например, первые члены этой последовательности: 1,2,4,8,1,3,6,1 ...). Пусть $p_k(n)$ — число элементов равных k среди первых n чисел этой последовательности, $k = 1, \dots, 9$. Докажите, что пределы $\lim_{n\to\infty} p_k(n)/n$ существуют и найдите их.

Задача 4.8. Пусть $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$ — разложение вещественного числа $x \in [0;1]$ в *непрерывную* (другое название – *цепную*) дробь. Докажите, что число $k \in \mathbb{N}$ встречается в последовательности $\{a_i\}_{i\geq 1}$ с асимптотической частотой

$$\frac{1}{\ln 2} \ln \frac{(k+1)^2}{k(k+2)},$$

для почти всех по мере Лебега чисел x.