Алгебраические подмножества проективного пространства

Неприводимые алгебраические множества, по их определению, нельзя развалить в объединение меньших алгебраических подмножеств. А что можно сказать о приводимых подмножествах?

Предложение 1. *1. Любая строго убывающая цепочка вложенных алгебраических подмножеств $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ конечна.*

2. Пусть $X \subset X_1 \cup \ldots \cup X_m$, где X — неприводимое множество. Тогда $\exists i\, X \subset X_i$.

3. Любое алгебраическое подмножество в $\mathbb{A}^n$ раскладывается в конечное объединение попарно не вложенных неприводимых подмножеств, причём единственным образом. Эти подмножества называются его неприводимыми компонентами.

Перед доказательством дадим важное

Определение 2. Кольцо A называется *нётеровым*, если любой идеал в A конечно порождён.

Определение 3. Кольцо A называется *нётеровым*, если любая возрастающая цепочка $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$ идеалов в A стабилизируется, т.е. $\exists N$, для которого $I_N = I_k$ при всех $K > N$.

Нетрудно убедиться, что эти два определения равносильны. Теорема Гильберта о базисе утверждает, что кольцо многочленов над полем от нескольких переменных нётерово. В действительности, почти любое кольцо, появляющееся в алгебраической геометрии, нётерово. В качестве примера не нётерова кольца можно привести кольцо непрерывных или бесконечно гладких функций на вещественной прямой.

Доказательство. 1. Пусть $\mathbb{A}^n \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots$ — бесконечная цепочка строго убывающих алгебраических подмножеств. Тогда $I(X_1) \subset I(X_2) \subset \ldots \subset \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ — бесконечная цепочка строго возрастающих идеалов. Это противоречит нётеровости кольца $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$.

2. $X = (X \cap X_1) \cup (X \cap (X_2 \cup \ldots \cup X_m))$. Так как X неприводимо, то $X = X \cap X_1$ или $X = X \cap (X_2 \cup \ldots \cup X_m)$, значит $X \subset X_1$ или $X \subset X_2 \cup \ldots \cup X_m$. В первом случае всё доказано, во втором применим индукцию.

3. Докажем существование разложения. Пусть X приводимо, запишем $X = X' \cup X''$. Если и X', и X'' раскладываются в объединение неприводимых, то и X тоже — всё доказано. Иначе обозначим через X_1 то из X' и X'', которое не раскладывается, и применим к нему этот процесс индуктивно. Получим бесконечную убывающую последовательность вложенных замкнутых подмножеств — противоречие с пунктом 1. В полученном разложении выкинем все вложенные компоненты.

   Единственность: пусть $X = \cup X_i = \cup X_i'$. Тогда по пункту 2 найдётся s, для которого $X_1 \subset X_s'$. Аналогично, X_s' вложено в некоторое из X_i. Из того, что все X_i попарно не вложены, получаем, что $X_1 = X_s'$. Аналогично для всех остальных компонент.

□

В прошлый раз мы доказали, что пересечение различных неприводимых кривых на плоскости состоит из конечного множества точек. Более того, это количество можно оценить.

Напомним, что *степенью* неприводимой плоской кривой, заданной уравнением $f(x, y) = 0$, называется число $\deg f$. Степень кривой X обозначается $\deg X$.

Теорема 4 (Безу). *Пусть $X, Y \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ — две плоские кривые, не имеющие общих компонент.*

1. *Тогда $|X \cap Y| \leqslant \deg X \cdot \deg Y$.*

2. *На самом деле $|X \cap Y| = \deg X \cdot \deg Y$.*

Пример 5. Пересечения кривой $y = 0$ с кривой $g(x, y) = 0$ — это точки вида $(a, 0)$, где a — корень многочлена $g(x, 0)$. Их число не превосходит

$$\deg_x g(x, 0) \leqslant \deg g(x, y) = \deg X \cdot \deg Y.$$

Таким образом, в этом случае теорема сводится к обычной теореме Безу для числа корней многочлена.

Пример 6. Пересечение двух кривых степени 2 в $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, согласно теореме Безу, состоит из не более, чем 4 точек. Такие кривые — это эллипсы, гиперболы и параболы, а также вырожденные кривые: двойная прямая или пара прямых. Легко привести пример, когда пересечение состоит ровно из 4 точек: два эллипса $x^2 + 2y^2 = 3$ и $2x^2 + y^2 = 3$. Также легко увидеть, что оно может быть и пустым, и содержать $1, 2$ или 3 точки.

Фраза «на самом деле» в пункте 2 теоремы Безу означает, что в действительности точек ровно $\deg X \cdot \deg Y$, но некоторые из них не сразу видны. Если научиться их находить, то можно будет сформулировать теорему так, чтобы получить равенство. Есть три типа скрывающихся точек, которые также нужно посчитать:

1. точки, определённые над расширением поля,

2. кратные точки,

3. бесконечно удалённые точки.

Первый тип — это, к примеру, комплексные решения системы уравнений с действительными коэффициентами, задающей пересечение кривых. Окружности радиуса 1 с центрами в точках $(\pm 2, 0)$ не пересекаются, однако если записать соответствующую систему уравнений, то у неё будет четыре решения. Чтобы справиться с этой проблемой, достаточно предполагать, что поле k алгебраически замкнуто.

Второй тип точек — это, например, точки касания кривой $X = V(f)$ и пересекающей её прямой $y = 0$. В этом случае ограничение многочлена f на прямую — это многочлен $f(x, 0)$, его корни дают точки пересечения, а точкам касания соответствуют кратные корни. Кратностью пересечения в такой точке касания называется кратность корня $f(x, 0)$. Напомним

Определение 7. Пусть $a \in \mathsf{k}$ — корень многочлена $f(x) \in \mathsf{k}[x]$. *Кратностью* a называется такое максимальное число r, что $f(x) \vdots (x - a)^r$.

Считается, что в точке касания кривых находятся несколько слипшихся точек пересечения, и в теореме Безу их нужно считать с кратностью. Однако, для того, чтобы определить кратность пересечения плоских кривых в общем случае, нужно потрудиться.

Нахождение точек этих двух типов уже позволяет сформулировать теорему Безу для многочленов с равенством:

Теорема 8 (Теорема Безу для многочленов)**.** *Пусть* $f(x) \in \mathsf{k}[x]$ *— многочлен, и поле* k *алгебраически замкнуто. Тогда число корней* f *с учётом кратностей равно* $\deg(f)$.

Третий тип точек — это точки пересечения, которые лежат не на самих кривых, а на их проективных замыканиях. Они возникают сами собой при переходе от аффинной плоскости к проективной, которая получается добавлением целой прямой, состоящей из бесконечно удалённых точек. Ими мы сейчас и займёмся.

Определение 9. *Проективным* n-мерным пространством $\mathbb{P}^n_{\mathsf{k}}$ над полем k называется фактор множества ненулевых наборов $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathsf{k}^{n+1}$ по отношению эквивалентности: $(x_0, \ldots, x_n) \sim (tx_0, \ldots, tx_n)$, $t \neq 0$. Класс такого набора обозначается $(x_0 : \ldots : x_n)$ В инвариантном виде, *проективизация* $\mathbb{P}(V)$ векторного пространства V размерности $n+1$ – это множество прямых в V, проходящих через 0.

Проективное пространство $\mathbb{P}^n$ покрывается аффинными пространствами, называемыми *картами.* Для $i = 0 \ldots n$ положим $U_i = \{(x_0 : \ldots : x_n) \mid x_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n$. Имеется биекция $\phi_i \colon U_i \to \mathbb{A}^n$, сопоставляющая (для $i = 0$) точке $(x_0 : \ldots : x_n) \in U_0$ точку $(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}) \in \mathbb{A}^n$, а точке $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{A}^n$ точку $(1 : y_1 : \ldots : y_n) \in U_0$. Точки, не лежащие в данной карте, называются *бесконечно удалёнными* для неё.

Вычислить значение многочлена в точке проективного пространства нельзя. Однако для однородных многочленов имеет смысл говорить о том, равно ли нулю это значение. Дело в том, что для однородного многочлена $F \in \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ степени m верно $F(tx_0, \ldots, tx_n) = t^m F(x_0, \ldots, x_n)$. Поэтому он одновременно равен или не равен нулю во всех эквивалентных наборах координат.

Определение 10. *Алгебраическим подмножеством* проективного пространства $\mathbb{P}^n_{\mathsf{k}}$ называется множество нулей некоторой (возможно, бесконечной) системы уравнений $F_\alpha(x_0 : \ldots : x_n) = 0$, где $F_\alpha \in \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ – однородные многочлены.

Также можно дать локальное определение.

Определение 11. Подмножество $X \subset \mathbb{P}^n$ называется *алгебраическим*, если все пересечения $X \cap U_i$ – алгебраические подмножества в аффинных пространствах $\mathbb{A}^n$.

Покажем, что определения 10 и 11 равносильны. Действительно, если X задано системой уравнений $F_\alpha = 0$, то $X \cap U_0$ задано системой уравнений $f_\alpha = 0$, где $f_\alpha(y_1, \ldots, y_n) = F_\alpha(1, y_1, \ldots, y_n)$, и потому алгебраично. Для рассуждения в другую сторону укажем способ переходить от аффинных многообразий и уравнений к проективным.

Определение 12. *Проективизацией*, или *проективным замыканием*, $\bar{X}$ алгебраического подмножества $X \subset \mathbb{A}^n \cong U_0 \subset \mathbb{P}^n$ называется наименьшее алгебраическое подмножество в $\mathbb{P}^n$, содержащее X.

Более явно, проективное замыкание можно определить как пересечение всех алгебраических подмножеств в $\mathbb{P}^n$, содержащих X, или как множество нулей всех однородных многочленов, равных нулю на X.

Как записать в координатах проективное замыкание? Если $f \in \mathsf{k}[y_1, \dots, y_n]$ – многочлен, равный нулю на X, рассмотрим однородный многочлен $F(x_0, \dots, x_n) = x_0^d f(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$, где $d = \deg f$.

Предложение 13. *1. Нули многочлена F в пересечении с U_0 совпадают с нулями f.*

2. Если идеал подмножества X порождён многочленами f_α, то замыкание X – множество нулей системы многочленов F_α.

Доказательство. 1. Точки U_0 имеют вид $(1 : x_1 : \ldots : x_n)$. Для такой точки условия $F(1, x_1, \dots, x_n) = 0$ и $f(x_1, \dots, x_n)$ равносильны.

2. Очевидно, на замыкании X все многочлены F_α обращаются в ноль. Обратно, пусть в некоторой точке $P = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n$ все многочлены F_α обращаются в ноль и пусть $F \in \mathsf{k}[x_0, \dots, x_n]$ — однородный многочлен, равный нулю на X. Покажем, что $F(P) = 0$. Многочлен $f(x_1, \dots, x_n) = F(1, x_1, \dots, x_n)$ также равен нулю на X и поэтому выражается через f_α: $f = \sum f_\alpha g_\alpha$. Переходя к проективным координатам, получим $x_0^l F(x_0, \dots, x_n) = \sum F_\alpha(x_0, \dots, x_n) \bar{G}_\alpha(x_0, \dots, x_n)$. Если $x_0 = 0$, то $P \in U_0$, значит по пункту 1 точка $P \in X$ и $F(P) = 0$ по предположению. Иначе подставим в предыдущее равенство $(x_0, \dots, x_n)$ и получим $F(x_0, \dots, x_n) = 0$. $\square$