Алгебраическая геометрия 1

3.10.2014
Лекция 4

Кольцо регулярных функций

В прошлый раз мы определили регулярные функции и отображения на подмножествах в проективном пространстве. Как же можно задавать такие функции и отображения?

Лемма 1. *Пусть $\phi\colon X \to Y$ — отображение между алгебраическими подмножествами $X \subset \mathbb{P}^n$ и $Y \subset \mathbb{P}^m$. Пусть X покрывается открытыми множествами $U \subset X$ и для каждого из них существуют такие однородные многочлены $F_0, \ldots, F_m \in \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ одинаковой степени, не обращающиеся одновременно в ноль на U, что*

$$\phi(x) = (F_0(x) : \ldots : F_m(x))$$

на U. Тогда отображение ϕ регулярно.

Доказательство. Для любой точки $x \in X$ рассмотрим карту в $\mathbb{P}^m$, содержащую $\phi(x)$. Можно считать, не ограничивая общности, что это U_0. Найдём окрестность $U \ni x$, как в условии. Тогда в качестве хорошей окрестности для x можно взять $U' = U \cap \{F_0 \neq 0\} \subset X$: для неё имеем $\phi(U') \subset U_0$. На такой окрестности ϕ в аффинных координатах на $\mathbb{A}^m$ запишется как $(F_1/F_0, \ldots, F_m/F_0)$, где все частные F_i/F_0 — регулярные функции по лемме 21 с прошлой лекции. Значит, ϕ — регулярное отображение по определению. $\square$

Как не всегда можно задать регулярное отображение?

Неверно, что любое регулярное отображение $X \to \mathbb{P}^m$ имеет вид $(f_0 : \ldots : f_m)$, где f_i — регулярные функции на X. Потому, например, что регулярные функции на проективном пространстве — константы.

Неверно, что любое регулярное отображение $X \to \mathbb{P}^m$ имеет вид $(F_0 : \ldots : F_m)$, где F_i — однородные многочлены. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим пример.

Пример 2. Пусть отображение $\phi\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ задано формулой

$$\phi(x_0 : x_1) = (x_0^2 : x_0x_1 : x_2^2).$$

Такое отображение называется *двукратным вложением*, его образ C — неособая коника. Оно регулярно по лемме 1 (где $U = \mathbb{P}^1$). Обратное отображение задаётся формулой

$$\phi^{-1}(y_0 : y_1 : y_2) = (y_0 : y_1)$$

на подмножестве $\{y_0 \neq 0\} \subset C$ и формулой

$$\phi^{-1}(y_0 : y_1 : y_2) = (y_1 : y_2)$$

на подмножестве $\{y_2 \neq 0\} \subset C$. Однако ни одна из этих формул не задаёт обратного отображения на всей кривой C, так как первая не определена в точке $(0 : 0 : 1) \in C$, а вторая — в точке $(1 : 0 : 0) \in C$.

Как показывает следующая лемма, при рассмотрении окрестностей в топологии Зарисского достаточно брать аффинные окрестности.

Лемма 3. *Любая точка открытого подмножества проективного алгебраического множества имеет в нём окрестность, изоморфную алгебраическому подмножеству аффинного пространства.*

Доказательство. Если $x \in X \subset \mathbb{P}^n$ — точка, лежащая в карте U_i, то её окрестность $X \cap U_i$ — открытое подмножество алгебраического множества аффинного пространства. Как мы знаем, любое открытое подмножество в алгебраическом подмножестве $Y \subset \mathbb{A}^n$ есть объединение множеств вида $Y_f = \{y \in Y \mid f(y) \neq 0\} \subset Y$, где $f \in \mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]$. Поэтому достаточно показать, что такое Y_f изоморфно алгебраическому подмножеству некоторого аффинного пространства.

Пусть $Y \subset \mathbb{A}^n$ задано как множество нулей многочленов f_α. Рассмотрим аффинное многообразие $Y' \subset \mathbb{A}^{n+1}$, заданное системой уравнений

$$f_\alpha(y_1, \dots, y_n) = 0, \quad f(y_1, \dots, y_n)y_{n+1} - 1 = 0.$$

Определим $\phi\colon Y' \to Y$ как проекцию на первые n координат. Несложно понять, что ϕ — изоморфизм между Y' и $Y_f \subset Y$. $\square$

Теперь, наконец, определим многообразия.

Определение 4. Будем называть (алгебраическим) многообразием одно из следующих множеств вместе с классом регулярных функций на нём:

1. алгебраическое подмножество аффинного пространства;
2. открытое подмножество алгебраического подмножества аффинного пространства;
3. алгебраическое подмножество проективного пространства;
4. открытое подмножество алгебраического подмножества проективного пространства.

Многообразие типа 1 или изоморфное ему называется *аффинным.*
Многообразие типа 2 или изоморфное ему называется *квазиаффинным.*
Многообразие типа 3 или изоморфное ему называется *проективным.*
Многообразие типа 4 или изоморфное ему называется *квазипроективным.*

Замечание 5. Любое аффинное многообразие квазиаффинно, любое квазиаффинное — квазипроективно, любое проективное — квазипроективно. Проективное и одновременно квазиаффинное многообразие — это конечное множество точек.

Пример 6. Проколотая прямая $\mathbb{A}^1 \setminus 0$ — это по определению квазиаффинное многообразие. Оно же аффинное, так как изоморфно плоской кривой, заданной уравнением $xy = 1$. А вот проколотая плоскость $\mathbb{A}^2 \setminus 0$ уже не будет аффинным многообразием, в чём мы скоро сможем убедиться. Проективное пространство без гиперповерхности $f(x_0, \dots, x_n) = 0$ — квазипроективное многообразие. Но оно же и аффинное, что мы также в своё время увидим. А вот проективная плоскость без точки $\mathbb{P}^2 \setminus 0$ не квазиаффинна и не проективна.

Одна из ключевых идей алгебраической геометрии — рассматривать регулярные функции не по отдельности, а все вместе. Она позволяет перевести большую часть геометрии многообразий на алгебраический язык. Этим переводом мы сейчас и займёмся.

Определение 7. Пусть X — многообразие над полем k. Через $\mathsf{k}[X]$ обозначается множество регулярных функций на X.

Предложение 8. *Множество $\mathsf{k}[X]$ является коммутативным кольцом и содержит в себе k. Оно называется* кольцом *или* алгеброй *регулярных функций на X.*

Для аффинных многообразий алгебра функций содержит всю информацию о многообразии и, более того, во многих отношениях является более правильным объектом, чем само многообразие. С другой стороны, для проективных многообразий алгебра функций состоит из функций, постоянных на каждой компоненте связности, т.е. интереса не представляет.

Если $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ аффинно, то алгебру функций несложно вычислить. Имеется сюръективный гомоморфизм ограничения $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathsf{k}[X]$. Его ядро по определению — идеал многообразия X, поэтому

$$\mathsf{k}[X] \cong \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]/I(X).$$

Если $Y \subset X$ — подмногообразие в аффинном многообразии, то можно рассмотреть идеал $I_X(Y)$ в $\mathsf{k}[X]$, состоящий из всех функций, тождественно обращающихся в ноль на Y. При этом разным подмногообразиям соответствуют разные идеалы, так как всякое подмногообразие восстанавливается по своему идеалу как множество нулей в X всех его функций. Какие же идеалы так получаются?

Определим два отображения между множеством подмножеств (не обязательно алгебраических) в X и множеством идеалов в $\mathsf{k}[X]$. Сопоставим подмножеству Y идеал

$$I(Y) = \{f \in \mathsf{k}[X] \mid f|_Y = 0\},$$

сопоставим идеалу J подмножество

$$V(J) = \{x \in X \mid \forall f \in J \ f(x) = 0\}.$$

Эти отображения не взаимно обратны, но, как мы увидим, они взаимно обратны на своих образах.

Следующие утверждения очевидно следуют из определений.

Предложение 9.

1. *$V(I(Y)) \supset Y$,*
2. *$I(V(J)) \supset J$,*
3. *$Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow I(Y_1) \supset I(Y_2)$,*
4. *$J_1 \subset J_2 \Rightarrow V(J_1) \supset V(J_2)$,*
5. *$I(V(I(Y))) = I(Y)$,*
6. *$V(I(V(J))) = V(J)$.*
7. *Операции V и I взаимно обратны на своих образах.*

Таким образом, алгебраические подмногообразия в X однозначно соответствуют некоторым идеалам в $\mathsf{k}[X]$. Как описать такие идеалы?

Определение 10. *Радикалом* идеала $J \subset A$ в коммутативном кольце называется множество $r(J)$ элементов $a \in A$ таких, что $a^N \in J$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Идеал называется *радикальным*, если $r(J) = J$.

Следующие свойства несложно проверить:

Предложение 11. *1. Радикал идеала — идеал,*

2. $r(J) \supset J$,

3. $r(r(J)) = r(J)$,

4. $r(I_1 \cap I_2) = r(I_1) \cap r(I_2)$,

5. если идеал J прост, то $r(J) = J$,

6. если J — пересечение простых идеалов, то $r(J) = J$.

Теорема 12 (теорема Гильберта о нулях, Nullstellensatz)**.** *Если поле k алгебраически замкнуто, $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ — аффинное многообразие и $J \subset \mathsf{k}[X]$ — идеал, то $I(V(J)) = r(J)$.*

Скажем то же самое ещё раз более простыми словами.

Теорема 13. *Пусть поле k алгебраически замкнуто, $f, f_1, \ldots, f_m \in \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ — многочлены. Пусть f обращается в ноль во всех точках $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$, где обращаются в ноль все f_i. Тогда при некотором N многочлен f^N представляется в виде $\sum_{i=1}^m f_i g_i$, где $g_i \in \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ — многочлены.*

Этот результат в качестве частного случая имеет лемму 11 с первой лекции про плоские кривые.

Таким образом, теорема Гильберта говорит, что $I(V(J))$ — радикал идеала J и, следовательно, образ отображения I — радикальные идеалы. Получается

Следствие 14. *При $\mathsf{k} = \bar{\mathsf{k}}$ имеется взаимно-однозначное соответствие между аффинными подмногообразиями в аффинном многообразии X и радикальными идеалами в алгебре $\mathsf{k}[X]$.*

Приведём несколько геометрических свойств этого соответствия.

Предложение 15. *Для любых идеалов $J_1, J_2 \subset \mathsf{k}[X]$ и любых подмножеств $Y_1, Y_2 \subset X$ верно*

1. $V(J_1 + J_2) = V(J_1) \cap V(J_2)$,

2. $V(J_1 \cap J_2) = V(J_1) \cup V(J_2)$,

3. $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$,

4. $I(Y_1 \cap Y_2) = r(I(Y_1) + I(Y_2))$.