Рациональные функции

Итак, максимальные идеалы кольца регулярных функций — это точки многообразия. В абстрактной алгебраической геометрии это принимается за определение точки многообразия.

Что происходит с точками при регулярном отображении?

Пусть $\phi\colon X \to Y$ — регулярное отображение аффинных многообразий, $\phi^*\colon \mathsf{k}[Y] \to \mathsf{k}[X]$ — двойственное отображение на функциях, $x \in X$ — точка, $I(x) \subset \mathsf{k}[X]$ — соответствующий максимальный идеал. Тогда $(\phi^*)^{-1}I(x) \subset \mathsf{k}[Y]$ — идеал, состоящий из функций $g \in \mathsf{k}[Y]$ таких, что $\phi^*(g) = g\phi \in I(x)$, т.е. $g\phi(x) = 0$, т.е. $g(\phi(x)) = 0$. Значит, это идеал $I(\phi(x))$. Итак, образу точек при регулярном отображении соответствует прообраз максимального идеала.

А что происходит при отображениях с подмногообразиями? Как мы знаем, неприводимые подмногообразия в аффинном многообразии X соответствуют простым идеалам в $\mathsf{k}[X]$.

Алгебраически образу подмногообразия соответствует прообраз простого идеала. А именно, пусть $\phi\colon X \to Y$ — регулярное отображение аффинных многообразий, $\phi^*\colon \mathsf{k}[Y] \to \mathsf{k}[X]$ — двойственное отображение на функциях, $W \subset X$ — неприводимое подмногообразие, $I(W) \subset \mathsf{k}[X]$ — соответствующий простой идеал. Тогда $(\phi^*)^{-1}I(W) \subset \mathsf{k}[Y]$ — идеал, состоящий из функций $g \in \mathsf{k}[Y]$ таких, что $g\phi \in I(W)$, т.е. $g\phi = 0$ на W, т.е. $g = 0$ на $\phi(W)$. Значит, $(\phi^*)^{-1}I(W)$ — это идеал замыкания $\phi(W)$ в топологии Зарисского. Это замыкание неприводимо.

Заметим, что образ подмногообразия (как и самого многообразия X) может не быть замкнут, поэтому приходится переходить к замыканию.

Теперь выясним, как на языке идеалов описать прообраз.

Напомним, что образ идеала $I \subset A$ при гомоморфизме колец $p\colon A \to B$ — не обязательно идеал. Однако всегда можно рассмотреть идеал $(p(I)) \subset B$, порождённый множеством $p(I)$. Часто его и называют *образом* или *расширением идеала* при гомоморфизме.

Пусть во введенных обозначениях $y \in Y$ — точка и $I(y) \subset \mathsf{k}[Y]$ — её идеал. Тогда

$$\begin{aligned} x \in \phi^{-1}(y) \Leftrightarrow \phi(x) = y \Leftrightarrow \forall g \in I(y) \;\; g(\phi(x)) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall g \in I(y) \;\; \phi^*(g)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in V(\phi^*(I(y))) \Leftrightarrow x \in V((\phi^*(I(y)))). \end{aligned}$$

Таким образом, прообраз точки y — это подмножество, определённое идеалом $(\phi^*(I(y)))$ в $\mathsf{k}[X]$, это алгебраическое (т.е. замкнутое) подмножество в X.

Аналогично для подмногообразия $W \subset Y$ имеем

$$x \in \phi^{-1}(W) \Leftrightarrow x \in V((\phi^*(I(W)))).$$

Идеал $(\phi^*(I(W)))$ может совпадать со всем кольцом, геометрически это соответствует тому, что прообраз подмногообразия пуст. Идеал $(\phi^*(I(W)))$ не обязательно прост и не обязательно радикален. Геометрически это может означать, что прообраз неприводимого многообразия приводим, либо что через $\phi^*(I(W))$ выражаются не все полиномиальные соотношения на точки прообраза. Идеалы неприводимых компонент $\phi^{-1}(W)$ — это минимальные простые идеалы в $\mathsf{k}[X]$, содержащие $(\phi^*(I(W)))$.

Пример 1. Рассмотрим отображение $\phi\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1, \phi(x,y) = xy$. Двойственное отображение на функциях такое: $\phi^*\colon \mathsf{k}[t] \to \mathsf{k}[x,y], \phi^*(t) = xy$. Образ (t) в $\mathsf{k}[x,y]$ – это $xy\mathsf{k}[xy]$,а идеал $(\phi^*(t))$ есть (xy). Он не прост, но радикален, раскладывается в пересечение двух простых идеалов: $(x) \cap (y)$. Прообраз точки 0 при ϕ — это пара прямых.

Пример 2. Рассмотрим отображение $\phi\colon \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1, \phi(x) = x^2$. Двойственное отображение на функциях такое: $\phi^*\colon \mathsf{k}[x] \to \mathsf{k}[x], \phi^*(x) = x^2$. Образ (x) в $\mathsf{k}[x]$ – это $x^2\mathsf{k}[x^2]$, а идеал $(\phi^*(x))$ есть (x^2). Он не прост и не радикален, но его радикал (x) прост. Это значит, что прообразом является неприводимое многообразие (точка 0), но взятое с кратностью 2.

Замечание 3. Прообраз максимального идеала при гомоморфизме колец не всегда максимален: рассмотрим вложение $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. Прообраз максимального идеала $(0) \subset \mathbb{Q}$ — идеал $(0) \subset \mathbb{Z}$, он не максимален.

Однако для конечно порождённых алгебр над полем всё хорошо. А именно, пусть $p\colon A \to B$ — гомоморфизм конечно порождённых над полем k алгебр, а $\mathfrak{m} \subset B$ — максимальный идеал. Тогда идеал $p^{-1}\mathfrak{m}$ максимален. Доказательство мы оставляем в качестве упражнения.

А вот для простых идеалов в кольце, напротив, прообраз при гомоморфизме всегда прост:

Лемма 4. *Пусть $p\colon A \to B$ — гомоморфизм колец, а $\mathfrak{p} \subset B$ — простой идеал. Тогда идеал $p^{-1}\mathfrak{p}$ прост.*

Доказательство. Напомним удобный критерий: идеал $I \subset R$ прост титтк кольцо I/R не имеет делителей нуля.

Индуцированный гомоморфизм $A/p^{-1}\mathfrak{p} \to B/\mathfrak{p}$ — вложение. Кольцо $B/\mathfrak{p}$ не имеет делителей нуля, значит их нет и в $A/p^{-1}\mathfrak{p}$. Т.е. $p^{-1}\mathfrak{p} \subset A$ – простой идеал. □

Мы видели, что любой гомоморфизм алгебр регулярных функций определяет единственное отображение многообразий. А верно ли, что любая алгебра определяет единственное многообразие? Верно, если рассматривать достаточно хорошие алгебры. Какие именно?

Во-первых, алгебра функций обязана быть ассоциативной, коммутативной алгеброй над некоторым полем. Во-вторых, по предложению 13 прошлой лекции, она должна быть конечно порождена. Этого ещё недостаточно:

Пример 5. Алгебра $\mathsf{k}[t]/t^2$ не является алгеброй функций ни на каком многообразии. Действительно, элемент $\bar{x} \neq 0$, но $(\bar{x})^2 = 0$, а для функций такого не бывает.

Определение 6. *Нильпотентом* в кольце называется элемент a такой, что $a^N = 0$ при некотором натуральном N.

Несложно проверить, что нильпотенты в коммутативном кольце образуют идеал. Этот идеал — радикал нулевого идеала.

Третье условие — алгебра функций на многообразии не должна содержать нильпотентов — тоже очевидно. Оказывается, что этих трёх условий достаточно.

Теорема 7. *Пусть A — ассоциативная коммутативная конечно порождённая алгебра над k без нильпотентов. Тогда $A \cong \mathsf{k}[X]$ для некоторого аффинного многообразия X над k.*

Доказательство. Рассмотрим сюръекцию $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n] \to A$, пусть I — её ядро, а $X \subset \mathbb{A}^n$ — множество нулей функций из идеала I. По теореме Гильберта о нулях $I(X) = r(I)$ и $r(I) = I$. Действительно, если $a^n \in I$, то $\bar{a}$ — нильпотент в A/I, значит $\bar{a} = 0 \in A/I$ и $a \in I$. Тогда $A \cong \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]/I \cong \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]/I(X) \cong \mathsf{k}[X]$. □

Как и регулярные функции на многообразии, частично определённые регулярные функции на многообразии также можно рассматривать «все вместе», как один алгебраический объект.

Предположим до конца лекции, что все рассматриваемые многообразия неприводимы, а поле k, как и прежде, алгебраически замкнуто.

Напомним, алгебраическое многообразие неприводимо, если его нельзя представить в виде объединения двух нетривиальных замкнутых по Зарисскому подмножеств. Эквивалентным образом можно сказать, что многообразие неприводимо, если любые два его непустые открытые подмножества пересекаются.

Лемма 8. *Пусть многообразие X неприводимо, $U \subset X$ — непустое открытое подмножество, а $f_1, f_2 \in \mathsf{k}[X]$ — функции, совпадающие на U. Тогда $f_1 = f_2$ на X.*

Доказательство. Рассмотрим открытые подмножества U и $U' = \{x \mid f_1(x) - f_2(x) \neq 0\}$. Они не пересекаются, U непусто, значит U' пусто. □

Определение 9. *Рациональной функцией* на (квазипроективном) неприводимом многообразии X называется класс эквивалентности пар (U, f), где $U \subset X$ — непустое открытое подмножество, а $f \in \mathsf{k}[U]$ — регулярная функция, по следующему отношению. Пары (U, f) и (U', f') эквивалентны, если на некотором непустом открытом подмножестве $U'' \subset U \cap U'$ функции f_1 и f_2 совпадают.

Замечание 10. В данном определении можно сказать «на пересечении $U \cap U'$ функции f_1 и f_2 совпадают». Действительно, $U \cap U'$ неприводимо, и если две регулярные функции равны на открытом подмножестве в $U \cap U'$, то они равны и на всём $U \cap U'$ по лемме 8.

Рациональная функция не является функцией в смысле теории множеств, но является частично определённой функцией.

Определение 11. Рациональная функция (U, f) на X *определена* в точке $x \in X$, если найдётся пара (U', f'), эквивалентная (U, f), что $x \in U'$. Число $f'(x)$ при этом называется *значением* рациональной функции в точке x. Множество точек, в которых определена рациональная функция, называется её *областью определения*. Точки, в которых рациональная функция не определена, называется её *полюсами*.

Замечание 12. Легко видеть, что значение рациональной функции в точке, где функция определена, не зависит от выбора пары, это прямо следует из замечания 10. Кроме того, область определения рациональной функции — открытое множество как объединение открытых. Соответственно, множество полюсов рациональной функции замкнуто.

Рациональные функции на неприводимом многообразии можно складывать и умножать.

Определение 13. *Суммой* рациональных функций (U_1, f_1) и (U_2, f_2) называется рациональная функция $(U_1 \cap U_2, f_1 + f_2)$, аналогично определяется произведение.

Нетрудно убедиться, что данное определение корректно, сумма не зависит от выбора пары. Заметим также, что для приводимых многообразий сумма может не существовать. Поэтому рациональные функции рассматривают только для неприводимых многообразий.

Пример 14. Пусть $X \subset \mathbb{A}^2$ — пара прямых, заданная уравнением $xy = 0$. Тогда $1/x$ и $1/y$ — рациональные функции на X, сумма которых нигде не определена.

Кроме того, рациональные функции можно делить друг на друга. Действительно, если $f \not\equiv 0$, то обратной к функции (U, f) будет $(U \cap \{f \neq 0\}, 1/f)$.

Таким образом, множество рациональных функций на неприводимом многообразии X над k образует поле, которое обозначается $\mathsf{k}(X)$. Это — важный инвариант многообразий, хотя и более грубый, чем алгебра функций для аффинных многообразий.

Предложение 15. *Пусть $Y \subset X$ — непустое открытое подмножество в неприводимом многообразии. Тогда $\mathsf{k}(Y) \cong \mathsf{k}(X)$.*

Доказательство. Установим биекцию. Пара (U, f), задающая рациональную функцию на Y, задаёт рациональную функцию и на X. Обратно, рациональной функции (U, f) на X (где $U \subset X$) соответствует пара $(U \cap Y, f|_{U\cap Y})$, задающая рациональную функцию на Y. □

Поэтому по сути достаточно изучать поля рациональных функций для аффинных многообразий — в любом квазипроективном многообразии есть аффинное открытое подмножество.

Предложение 16. *Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — квазиаффинное неприводимое многообразие. Тогда $\mathsf{k}(X)$ – поле частных кольца $\mathsf{k}[X]$.*

Доказательство. Любая регулярная функция на подмножестве $U \subset X$ по определению локально есть отношение многочленов, а каждый многочлен задаёт регулярную функцию на X, получаем элемент поля частных $\mathsf{k}[X]$. Наоборот, любая дробь f/g, где $f, g \in \mathsf{k}[X]$ и $g \not\equiv 0$ на X, задаёт рациональную функцию $(\{x \in X \mid g(x) \neq 0\}, f/g)$. □

Поэтому рациональные функции и называются *рациональными*, т.е. *дробными*.

Следствие 17. $\mathsf{k}(\mathbb{A}^n) \cong \mathsf{k}(\mathbb{P}^n) \cong \mathsf{k}((\mathbb{P}^1)^n) \cong \mathsf{k}(x_1, \ldots, x_n)$.

Доказательство. $\mathsf{k}(\mathbb{A}^n)$ — поле частных кольца $\mathsf{k}[\mathbb{A}^n] \cong \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$, т.е. поле рациональных функций от n переменных. □

Пусть теперь $x \in X$ — точка на многообразии. Множество рациональных функций, определённых в x, обозначается $\mathcal{O}_{X,x}$. Оно является кольцом и содержит k. Это кольцо называется *локальным кольцом многообразия в точке x*. Таким образом, имеем включения:

$$\mathsf{k} \subset \mathsf{k}[X] \subset \mathcal{O}_{X,x} \subset \mathsf{k}(X).$$

Кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ не является кольцом регулярных функций ни на каком аффинном многообразии, потому что оно (кроме тривиальных случаев) не конечно порождено. Однако если бы такое многообразие существовало, оно было бы пересечением всех окрестностей точки x в X, и таким его полезно себе представлять. Однако это кольцо нётерово. Оно отвечает за геометрию многообразия X вокруг точки x, что проявляется в следующих фактах:

Предложение 18.

1. *Пусть $x \in X$ и $U \subset X$ — окрестность точки x. Тогда имеем $\mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{O}_{U,x}$.*
2. *Локальные кольца $\mathcal{O}_{X,x}$ и $\mathcal{O}_{Y,y}$ изоморфны $\iff$ у точек $x \in X$ и $y \in Y$ есть изоморфные окрестности.*
3. *Простые идеалы кольца $\mathcal{O}_{X,x}$ взаимно-однозначно соответствуют неприводимым подмногообразиям в X, содержащим x.*

Функции из $\mathcal{O}_{X,x}$, обращающиеся в x в ноль, образуют идеал $\mathfrak{m}_x$ в $\mathcal{O}_{X,x}$. Он максимален, так как $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong \mathsf{k}$. Заметим, что для точки y, отличной от x, такого идеала рассмотреть нельзя, потому что не все регулярные в x функции можно вычислить в точке y. Более того, идеал $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ — единственный максимальный идеал, он содержит в себе все прочие идеалы. Сейчас мы в этом убедимся.

Определение 19. Кольцо, в котором существует единственный максимальный идеал, называется *локальным.*

Несложно доказать следующее

Предложение 20. *Пусть $\mathfrak{m} \subset A$ — максимальный идеал в кольце. Тогда A локально $\iff$ все элементы из $A \setminus \mathfrak{m}$ обратимы.*

Как легко видеть, если f — регулярная функция на окрестности точки x и $f(x) \neq 0$, то в некоторой (возможно, меньшей) окрестности x регулярна функция $1/f$. Значит, все элементы из $\mathcal{O}_{X,x} \setminus \mathfrak{m}_x$ обратимы, и кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ локально.

Предложение 21. *Пусть $x \in X$ — точка аффинного многообразия. Тогда локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ — это множество дробей вида f/g, $f, g \in \mathsf{k}[X]$, $g(x) \neq 0$, с точностью до естественной эквивалентности дробей.*

Доказательство. Следует из определений и предложения 16. □

Таким образом, локальные кольца точек на многообразии довольно громоздки. Тем не менее, они во многих отношениях устроены проще, чем кольца регулярных функций на аффинных многообразиях, и в дальнейшем будут активно использоваться.