Алгебраическая геометрия 1 | 31.10.2014 Лекция 8

Особые точки плоских кривых

В прошлый раз мы говорили о неособых и особых точках кривых. Сегодня мы коротко обсудим аналогичные понятия для многообразий произвольной размерности. Доказательства в большинстве случаев сложны и требуют сведений из коммутативной алгебры, потому будут пропущены. Как обычно, мы предполагаем, что основное поле k алгебраически замкнуто.

Напомним, что размерностью $\dim X$ алгебраического многообразия X называется наибольшее n, для которого существует цепочка строго вложенных замкнутых по Зарисскому неприводимых подмножеств $X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n$ в X.

Предложение 1. *Пусть $P \in X$ — точка на многообразии, $\mathfrak{m}_P \subset \mathcal{O}_{X,P}$ — соответствующий идеал в локальном кольце. Тогда*

$$\text{\textit{минимальное число порождающих идеала} } \mathfrak{m}_P = \dim_{\mathsf{k}} \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \geqslant \dim X.$$

Доказательство. Набор элементов $t_1, \ldots, t_d \in \mathfrak{m}_P$ порождает идеал $\mathfrak{m}_P$ над кольцом $\mathcal{O}_{X,P} \iff t_i$ порождают векторное пространство $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ над полем k. В одну сторону это было доказано на прошлой лекции и почти очевидно, в другую следует из леммы Накаямы (которую можно найти в любом учебнике по коммутативной алгебре). Отсюда вытекает равенство.

Неравенство мы не доказываем: оно требует алгебраической техники, с которой мы не знакомы. □

Определение 2. Если в предыдущем неравенстве выполнено равенство, то точка P называется *неособой*. В таком случае элементы минимального набора $t_1, \ldots, t_n$ порождающих идеала $\mathfrak{m}_P$ называются *локальными параметрами* в точке P.

Аналогично случаю кривых, имеем

Предложение 3. *Пусть $P \in X$ — неособая точка, $t_1, \ldots, t_n$ — локальные параметры в P (где $n = \dim X$), и $f \in \mathcal{O}_{X,P}$ — произвольная функция. Тогда для любого N существует единственный многочлен $P_N \in \mathsf{k}[y_1, \ldots, y_n]$ степени $\leqslant N$, для которого $f = P_N(t_1, \ldots, t_n) + g$, где $g \in \mathfrak{m}_P^{N+1}$ — некоторая функция.*

Многочлены P_N для разных N суть начальные куски некоторого степенного ряда, который называется *рядом Тейлора* для функции f в точке P. Он однозначно определяет функцию f (и конечно, зависит от выбора локальных параметров).

Определение 4. *Касательным пространством* $T_P X$ к многообразию X в точке P называется векторное пространство $(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)^*$.

Следующие свойства показывают, что это название оправдано.

Предложение 5. 1. *Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — аффинное подмногообразие. Тогда $T_P X$ изоморфно пространству таких векторов $v \in \mathbb{A}^n$, что $\frac{df}{dv}(P) = 0$ для всех многочленов $f \in I(X)$.*

2. *$\dim T_P X \geqslant \dim X$, причём равенство имеет место $\iff$ P — неособая точка.*

3. Всякое регулярное отображение $\phi\colon X \to Y$ определяет дифференциал

$$d\phi(P)\colon T_P X \to T_Q Y,$$

где $Q = \phi(P)$.

4. Определено дифференцирование функций по направлению касательного вектора $v \in T_P X$: всякой функции $f \in \mathcal{O}_{X,P}$ ставится в соответствие число $\frac{d}{dv} f$.

Доказательство. 2) следует из определения неособой точки.

3) Отображение ϕ определяет гомоморфизм на кольцах функций $\phi^*\colon \mathcal{O}_{Y,Q} \to \mathcal{O}_{X,P}$. По определению, при этом ϕ^* переводит $\mathfrak{m}_Q$ в $\mathfrak{m}_P$ и $\mathfrak{m}_Q^2$ в $\mathfrak{m}_P^2$, значит ϕ^* индуцирует отображение $\mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2$ в $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$. Двойственное к этому отображению и есть $d\phi(P)$.

1) Во-первых, касательное пространство к $\mathbb{A}^n$ в любой точке отождествляется с $\mathbb{A}^n$: например, для точки 0 максимальный идеал $\mathfrak{m}_0$ порождён координатными функциями x_i и $T_0\mathbb{A}^n$ — это двойственное пространство к $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, т.е. $\mathbb{A}^n$. Вложение $X \subset \mathbb{A}^n$ по пункту 3 задаёт вложение $T_P X \to T_P \mathbb{A}^n$. В его образе будут ровно те касательные векторы к $\mathbb{A}^n$ в P, значение которых на всех функциях из $I(X)$ равно нулю. Действительно, имеем сюръективное отображение $\mathfrak{m}_{\mathbb{A}^n,P}/\mathfrak{m}^2_{\mathbb{A}^n,P} \to \mathfrak{m}_{X,P}/\mathfrak{m}^2_{X,P}$. Двойственное пространство к $\mathfrak{m}_{X,P}/\mathfrak{m}^2_{X,P}$ состоит из элементов $(\mathfrak{m}_{\mathbb{A}^n,P}/\mathfrak{m}^2_{\mathbb{A}^n,P})^*$, равных нулю на ядре этого отображения, т.е. на функциях из идеала многообразия X.

4) Будем обозначать через $[h]$ класс функции $h \in \mathfrak{m}_P$ в факторпространстве $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$. Определим $\frac{d}{dv} f$ как $(v, [f - f(P)])$. Такое дифференцировние обладает естественными свойствами: производная констант равна нулю, производная суммы — сумме производных, выполнено правило Лейбница. Действительно, пусть $f, g \in \mathcal{O}_{X,P}$. Представим их в виде $f = f_0 + f_+, g = g_0 + g_+$, где $f_0 = f(P), f_+ \in \mathfrak{m}_P$, аналогично для g. Тогда

$$\frac{d}{dv}(fg) = (v, [fg - f_0 g_0]) = (v, [f_+ g_0 + f_0 g_+ + f_+ g_+]) = g_0 \cdot (v, [f_+]) + f_0 \cdot (v, [g_+]) = g_0 \cdot \frac{d}{dv}(f) + f_0 \cdot \frac{d}{dv}(g),$$

так как $f_+ g_+ \in \mathfrak{m}_P^2$ и $[f_+ g_+] = 0$. $\square$

Теперь вернёмся к кривым и изучим подробнее особые точки на них, в основном сосредоточившись на плоских кривых.

Пусть $V(f) \subset \mathbb{A}^2$ — плоская кривая, заданная уравнением $f(x, y) = 0$, и $P \in \mathbb{A}^2$ — точка. Делая линейную замену координат, можно считать, что $P = (0, 0)$. Разложим многочлен f в сумму однородных слагаемых:

$$f(x, y) = f_0 + f_1(x, y) + f_2(x, y) + \ldots + f_n(x, y),$$

где f_i — однородный многочлен степени i.

Определение 6. *Кратностью* μ_P точки P кривой $V(f)$ называется наименьшее такое r, что $f_r \neq 0$.

Предложение 7. *Точка P лежит на $V(f)$ $\iff$ $\mu_P > 0$. Точка P особая $\iff$ $\mu_P > 1$.*

Доказательство. Первое очевидно, второе сразу следует из того, что $f_1 = \frac{df}{dx}(P) \cdot x + \frac{df}{dy}(P) \cdot y$. $\square$

В окрестности точки P кратности r поведение кривой в первом приближении описывается уравнением $f_r(x,y)=0$. Разложим f_r в произведение линейных форм:

$$f_r(x,y)=\prod_{i=1}^{r}(a_ix+b_iy).$$

Группируя пропорциональные множители, получим

$$f_r=\prod_{i=1}^{m}(a_ix+b_iy)^{e_i},$$

причём $\sum e_i=r$.

Определение 8. Прямые $a_ix+b_iy=0$ называются *касательными прямыми* к кривой $V(f)$ в точке P. Числа e_i называются *кратностями* касания.

Определение 9. Если выполнено любое из равносильных условий: все кратности касания равны 1; число касательных прямых к кривой в особой точке равно кратности этой точки, то особенность называется *обыкновенной*.

Пример 10. Рассмотрим кривую $f(x,y)=y^2-x^3-x^2=0$. Имеем $f_2=y^2-x^2, f_3=-x^3$. Точка $(0,0)$ — особая, так как её кратность равна 2, что больше 1. Это обыкновенная двойная точка, так как $f_2=(y-x)(y+x)$. Касательными прямыми в нуле являются прямые $y=\pm x$.

Обыкновенные двойные точки — самые типичные особенности плоских кривых. Точнее говоря, если взять «случайную» особую плоскую кривую, она будет иметь только обыкновенные двойные особенности.

Пример 11. Рассмотрим кривую $f(x,y)=y^2-x^3=0$. Имеем $f_2=y^2, f_3=-x^3$. Точка $(0,0)$ — особая, так как её кратность равна 2, что больше 1. Касательной прямой в нуле будет прямая $y=0$, это касательная кратности 2. Таким образом, это не обыкновенная двойная точка.

Определение 12. Если P — особая точка кратности 2, и для некоторой линейной формы l имеем $f_2\sim l^2$ и $f_3\not\vdots\, l$, то P называется *каспидальной особенностью*, или *каспом*.

Пример 13. Рассмотрим кривую $y=p(x)$, где $p\in\mathsf{k}[x]$ — многочлен степени n. У этой аффинной кривой нет особенностей, но они есть у её проективного замыкания. Последнее задаётся уравнением $yz^{n-1}-P(x,z)=0$, где $P(x,z)=z^np(x/z)$ — полученный из p однородный многочлен степени n. Единственная бесконечная точка на этой кривой — точка $(0:1:0)$. В содержащей её аффинной карте U_2 кривая описывается уравнением $f(x,z)=z^{n-1}-P(x,z)=0$. Имеем $f_{n-1}=z^{n-1}$, $f_n=-P(x,z)$. Это особая точка кратности $n-1$ с единственной касательной прямой $z=0$ (в исходных обозначениях это бесконечно удалённая прямая), имеющей кратность $n-1$.

Определение 14. Если P — особая точка кратности r, и для некоторой линейной формы l имеем $f_r\sim l^r$ и $f_{r+1}\not\vdots\, l$, то P называется *гиперкаспидальной особенностью*, или *гиперкаспом*.

Как мы помним, для того, чтобы в теореме Безу получить равенство, надо определить кратность пересечения кривых. Нетривиально это сделать именно в особых точках.

Удобно определять кратность (ещё говорят *индекс*) пересечения не для двух конкретных кривых $V(f)$ и $V(g)$ и конкретной точки P, а для всех кривых и точек одновременно, как функцию $i_P(f,g)$ от трёх аргументов. При этом полезно допускать, что многочлены f,g могут быть приводимыми и даже иметь кратные множители. Какими же свойствами должна обладать кратность пересечения? Перечислим некоторые из них:

1. $i_P(f,g) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, если кривые $V(f)$ и $V(g)$ не имеют общих компонент, проходящих через P, в противном случае $i_P(f,g) = \infty$.
2. $i_P(f,g) > 0 \iff$ обе кривые $V(f)$ и $V(g)$ содержат P.
3. Если $\phi\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ — автоморфизм, то $i_P(f,g) = i_{\phi(P)}(\phi(f), \phi(g))$ (где $\phi(f) = f \circ \phi^{-1}$).
4. $i_P(f,g) = i_P(g,f)$.
5. $i_P(f,g) \geqslant \mu_P(f) \cdot \mu_P(g)$, причём равенство достигается $\iff$ $V(f)$ и $V(g)$ не имеют общих касательных прямых в точке P.
6. $i_P(f, g_1 g_2) = i_P(f, g_1) + i_P(f, g_2)$.
7. $i_P(f,g) = i_P(f, g + af)$ для любого многочлена $a \in \mathsf{k}[x,y]$.

Замечание 15. Свойство 5 позволяет в большинстве случаев сразу вычислить индекс пересечения, так как совпадение касательных — редкое событие. Свойство 7 выражает то обстоятельство, что кратность пересечния должна зависеть только от ограничения многочлена g на кривую $V(f)$.

Теорема 16. *Существуют и единственны числа пересечения $i_P(f,g)$, определённые для всех ненулевых $f, g \in \mathsf{k}[x,y]$ и точек $P \in \mathbb{A}^2$, удовлетворяющие условиям 1-7.*

Доказательство. Докажем единственность. А именно, мы покажем, как вычислить индекс пересечения для любых двух кривых, пользуясь только свойствами 1-7.

Пользуясь свойством 3 и сдвигая точку отсчёта, можно считать, что $P = (0,0)$. Далее, запишем $f(x,y) = x \cdot p(x,y) + f(0,y)$, аналогично $g(x,y) = x \cdot q(x,y) + g(0,y)$. Применяя свойство 4, можно считать, что $\deg f(0,y) \geqslant \deg g(0,y)$. Если $g(0,y) = 0$, то по свойству 6 имеем $i_P(f,g) = i_P(f,q) + i_P(f,x)$. Затем каждое из слагаемых вычислим по индукции. Если же $g(0,y) \neq 0$, поделим $f(0,y)$ на $g(0,y)$ с остатком: $f(0,y) = c(y)g(0,y) + r(y)$. Затем запишем: $f(x,y) = g(x,y)c(y) + h(x,y)$, где $\deg h(0,y) = \deg r(y) < \deg g(0,y)$. Если $h = 0$, то $f \vdots g$. Если при этом $g(P) = 0$, то $V(f), V(g)$ имеют общую компоненту, проходящую через P, по свойству 1 получим $i_P(f,g) = \infty$. Если же $g(P) \neq 0$, то по свойству 2 $i_P(f,g) = 0$. Если же $h \neq 0$, по свойству 7 имеем $i_P(f,g) = i_P(f,h)$, и далее можно вычислять по индукции. Осталось вычислить $i_P(f,x)$. Применяя те же рассуждения для x вместо y, сведём вычисление к нахождению $i_P(x,y)$, что равно 1 по свойству 5.

Существование доказывается явной конструкцией. А именно, положим

$$i_P(f,g) = \dim_{\mathsf{k}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2, P}/(f,g).$$

Проверка всех свойств требует некоторой алгебраической техники, мы её опускаем. $\square$

Замечание 17. Если кривая $V(f)$ неособа в точке P, то кольцо $\mathcal{O}_{V(f),P}$ имеет дискретное нормирование, и кратность пересечения $V(f)$ с $V(g)$ равна порядку нуля функции $g\,|_{V(f)}$ в точке P.

Действительно, если t — локальный параметр в точке P на кривой $V(f)$, и порядок нуля ограничения g на $V(f)$ равен r, то $(g) = (t^r) \subset \mathcal{O}_{V(f),P}$. По модулю t^r любая функция на $V(f)$ единственным образом представляется в виде многочлена от t степени не более r. Значит,

$$i_P(f,g) = \dim \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,P}/(f,g) = \dim \mathcal{O}_{V(f),P}/(g) = \dim \mathcal{O}_{V(f),P}/(t^r) = r.$$

Замечание 18. Можно показать, что для многочленов $f, g \in \mathsf{k}[x,y]$, не имеющих общих множителей, верно равенство

$$\mathsf{k}[x,y]/(f,g) \cong \prod_{P \in V(f)\cap V(g)} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,P}/(f,g), \quad \text{и значит}$$

$$\dim \mathsf{k}[x,y]/(f,g) = \sum_P i_P(f,g).$$

Для доказательства равенства в теореме Безу после этого останется проверить, что

$$\dim \mathsf{k}[x,y]/(f,g) = (\deg f)\cdot(\deg g)$$

при условии, что f и g не имеют общих нулей на бесконечности.

В заключение поговорим ещё раз о кратностях особых точек. Мы определяли кратность только для особых точек на плоской кривой через задающее эту кривую уравнение. В действительности, можно выразить кратность особой точки плоской кривой через внутренние свойства локального кольца этой точки, и по аналогии ввести кратность для особой точки на любой, не обязательно плоской кривой.

Предложение 19. *Пусть $P \in X \subset \mathbb{A}^2$ — особая точка плоской кривой кратности r. Тогда векторное пространство $\mathfrak{m}_P^n/\mathfrak{m}_P^{n+1}$ имеет размерность r при больших n.*

Доказательство. Факторпространство $\mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P^{n+1}$ по $\mathfrak{m}_P^n/\mathfrak{m}_P^{n+1}$ изоморфно $\mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P^n$. Поэтому $\dim \mathfrak{m}_P^n/\mathfrak{m}_P^{n+1} = \dim \mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P^{n+1} - \dim \mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P^n$, вычислим $\dim \mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P^n$.

Пусть $I \subset \mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}$ обозначает максимальный идеал в локальном кольце точки P на $\mathbb{A}^2$ и $X = V(f)$. Тогда $\mathcal{O}_{X,P} = \mathcal{O}/(f)$ и

$$\mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P^n \cong \mathcal{O}/((f) + I^n).$$

Рассмотрим линейное отображение $m\colon \mathcal{O}/I^{n-r} \to \mathcal{O}/I^n$, заданное формулой $m([g]) = [gf]$. Так как $f = f_r +$ члены старших степеней, оно корректно определено. Кроме того, оно инъективно, а фактор $\mathcal{O}/I^n$ по $m(\mathcal{O}/I^{n-r}) = f\cdot\mathcal{O}_I^n$ изоморфен $\mathcal{O}/((f)+I^n)$. По теореме о гомоморфизме получаем

$$\mathcal{O}/((f)+I^n) \cong (\mathcal{O}/I^n)/m(\mathcal{O}/I^{n-r}).$$

Значит, $\dim \mathcal{O}/((f)+I^n) = \dim \mathcal{O}/I^n - \dim \mathcal{O}/I^{n-r}$. Наконец, пространство $\mathcal{O}/I^n$ имеет базис $\{[x^iy^j] \mid i+j<n\}$ (мы снова считаем, что $P = (0,0)$). Поэтому

$$\dim \mathcal{O}/I^n = 1+2+\ldots+n = n(n+1)/2;$$
$$\dim \mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P^n = \dim \mathcal{O}/I^n - \dim \mathcal{O}/I^{n-r} = n(n+1)/2 - (n-r)(n-r+1)/2 = rn + r(r+1)/2;$$
$$\dim \mathfrak{m}_P^n/\mathfrak{m}_P^{n+1} = \dim \mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P^n - \dim \mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P^{n+1} = rn + r(r+1)/2 - (r(n+1) + r(r+1)/2) = r,$$

ч.т.д. □

В связи с полученнным результатом естественно дать

Определение 20. *Кратностью* особой точки P на кривой X называется

$$\lim_{n\to\infty} \dim \mathfrak{m}_{X,P}^{n}/\mathfrak{m}_{X,P}^{n+1}.$$

Конечно, требуется проверить, что этот предел сущестует, т.е. при больших n число $\mathfrak{m}_{X,P}^{n}/\mathfrak{m}_{X,P}^{n+1}$ не зависит от n, но мы этого делать не будем.