Однородное координатное кольцо. Многочлен Гильберта.

Вернёмся к изучению глобальных свойств многообразий. Сегодня мы сопоставим каждому проективному многообразию некоторое градуированное кольцо, т.н. *однородное координатное кольцо многообразия.* Его свойства в чём-то аналогичны свойствам кольца регулярных функций на аффинном многообразии, а в чём-то существенное интереснее. Мы будем предполагать, что поле k алгебраически замкнуто.

Определение 1. Кольцо A, содержащее поле k, называется *градуированным*, если задано разложение

$$A = \bigoplus_{i \geqslant 0} A_i$$

в прямую сумму k-векторных подпространств A_i, для которого при всех i, j выполнено условие $A_i \cdot A_j \subset A_{i+j}$.

Идеал I градуированного кольца A называется *однородным*, если

$$I = \bigoplus_i (I \cap A_i).$$

Другими словами, если для любого элемента $a \in I$ все однородные слагаемые a_i также лежат в I.

Для всякого однородного идеала I в градуированном кольце A факторкольцо A/I также будет градуированным.

Основной (и, по сути, единственный, нужный нам) пример градуированного кольца — это кольцо многочленов $R = \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ в котором компонентой R_i считается множество однородных многочленов степени i. Сегодня мы будем обозначать это кольцо через R.

Определение 2. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие, определённое как множество нулей семейства однородных многочленов $F_i \in \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$. Определим *аффинный конус* $\bar{X}$ над X как аффинное многообразие в $\mathbb{A}^{n+1}$, заданное уравнениями $F_i = 0$.

Предложение 3. *Идеал $I(\bar{X}) \subset R$ — однородный.*

Доказательство. Действительно, пусть $f \in I(\bar{X})$ и $f = \sum_i f_i$ — разложение в сумму однородных. Ясно, что при $\lambda \neq 0$ верно $(a_0, \ldots, a_n) \in \bar{X} \iff (\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) \in \bar{X}$. Для любой точки $(a_0, \ldots, a_n) \in \bar{X}$ и любого λ имеем

$$0 = f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = \sum f_i(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = \sum \lambda^i f_i(a_0, \ldots, a_n).$$

Так как равенство выполнено при всех λ, получаем $f_i(a_0, \ldots, a_n) = 0$, значит $f_i \in I(\bar{X})$. $\square$

Определение 4. *Однородным идеалом* $I(X) \subset \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ проективного многообразия X называется идеал $I(\bar{X})$ его аффинного конуса.

Однородным координатным кольцом $S(X)$ проективного многообразия X называется факторкольцо $\mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]/I(X)$, или, что то же самое, кольцо регулярных функций на $\bar{X}$.

Из предложения 3 следует, что однородное координатное кольцо проективного многообразия градуированное.

Пример 5. Если $X = \mathbb{P}^n$, то $S(X) = \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ со стандартной градуировкой.

Пример 6. Если $X \subset \mathbb{P}^n$ задано одним однородным уравнением $F = 0$ степени d, то $S(X) = \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]/F$ со стандартной градуировкой. При этом

$$S(X)_i = \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]_i/(F \cdot \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]_{i-d}).$$

Замечание 7. Заметим, что однородное координатное кольцо зависит не только от многообразия, но и от его проективного вложения. То есть, оно не является инвариантом многообразия, в отличие от кольца регулярных функций. В качестве примера можно взять однородное кольцо гладкой коники на плоскости. Согласно примеру 6, оно изоморфно $\mathsf{k}[x, y, z]/(xz - y^2)$. В то же время, однородное координатное кольцо проективной прямой (которая изоморфна конике) — это $k[x, y]$. Но градуированные кольца $\mathsf{k}[x, y, z]/(xz - y^2)$ и $\mathsf{k}[x, y]$ неизоморфны (например, потому что у них компоненты в градуировке 1 имеют размерность 3 и 2 соответственно).

Тем не менее, многие свойства многообразий отражаются в свойствах их однородных идеалов и однородных координатных колец, подобно аффинной ситуации. Перечислим некоторые из них:

1. Многообразие X неприводимо $\iff$ $I(X) \subset R$ — простой идеал $\iff$ $S(X)$ не имеет делителей нуля.
2. Если $X, Y \subset \mathbb{P}^n$, то $X \subset Y \iff I(X) \supset I(Y)$.
3. Если $X, Y \subset \mathbb{P}^n$, то $I(X \cup Y) = I(X) \cap I(Y)$.
4. Если $X, Y \subset \mathbb{P}^n$, то $I(X \cap Y) \supset I(X) + I(Y)$.

Однако однородные координатные кольца плохо согласованы с регулярными отображениями многообразий. Не всякому регулярному отображению проективных многообразий $\phi\colon X \to Y$ соответствует однородный гомоморфизм $\phi^*\colon S(Y) \to S(X)$ их координатных колец.

Пример 8. Пусть $\phi\colon \mathbb{P}^1 \to C$ — изоморфизм между проективной прямой и коникой в $\mathbb{P}^2$. Ему должен был бы отвечать гомоморфизм колец $\phi^*\colon \mathsf{k}[x, y, z]/(xz - y^2) \to \mathsf{k}[x, y]$, переводящий x, y, z в x^2, xy, y^2 соответственно. Но такой гомоморфизм не однородный. А вот регулярному отображению $\phi^{-1}\colon Y \to X$ вообще «должен был бы» соответствовать гомоморфизм, «делящий степень однородных многочленов на 2», что бессмысленно.

Есть у однородных координатных колец проективных многообразий и преимущества перед кольцами регулярных функций для аффинных многообразий. Например, их размер можно (и полезно) контролировать.

Определение 9. *Функцией Гильберта* f_A градуированного кольца A называется функция

$$f_A(i) = \dim_{\mathsf{k}} A_i\colon \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

Функцией Гильберта f_X проективного многообразия X называется функция Гильберта его однородного координатного кольца.

Пример 10. Пусть $X = \mathbb{P}^n$. Тогда $f_X(i) = \dim \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]_i = C_{i+n}^n$.

Пример 11. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — гиперповерхность, заданная однородным уравнением $F = 0$ степени d. Тогда

$$f_X(i) = \dim S(X)_i = \dim(R/(F))_i = \dim(R_i/R_{i-d} \cdot F) = C_{i+n}^n - C_{i-d+n}^n$$

(если $i < d$, то второго слагаемого нет.)

Смысл данного определения объясняет замечательная теорема (которую мы не будем доказывать):

Теорема 12. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие. Тогда существует такой многочлен $P_X \in \mathbb{Q}[x]$ и такое число $N \in \mathbb{N}$, что $f_X(i) = P_X(i)$ при всех $i > N$.*

При этом $\deg P = m = \dim X$, а старший член $P(x)$ имеет вид $\frac{a}{m!}x^m$, где $a \in \mathbb{N}$.

Определение 13. Многочлен $P(x)$ называется *многочленом Гильберта* многообразия X, а число $\deg X = a$ называется *степенью* проективного многообразия X.

Замечание 14. Многочлен Гильберта проективного многообразия X, как и его степень, зависят от проективного вложения X (а размерность, конечно, не зависит).

Мы не будем доказывать теорему 12, но приведём некоторые объясняющие её следствия.

Предложение 15. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие и $H \subset \mathbb{P}^n$ —* общая *гиперплоскость, заданная линейным уравнением $F(x) = \sum a_i x_i = 0$. Тогда $\deg P_{X \cap H} = \deg P_X - 1$, а степени многообразий $X \cap H$ и X совпадают.*

Замечание 16. Слово «общая», неформально говоря, означает «взятая наобум». Формально же говоря, здесь «общая» значит «пересекающая каждую неприводимую компоненту X без кратностей». Последнее же, например, значит, что $I(X \cap H) = I(X) + (F)$.

Доказательство. В силу того, что $I(X \cap H) = I(X) + (F)$, имеем

$$S(X \cap H) = R/(I(X) + (F)) = S(X)/(F).$$

Следовательно, при больших i верно $S(X)/(F)_i = S(X)_i/F \cdot S(X)_{i-1}$. Значит, $P_{X \cap H}(i) = P_X(i) - P_X(i-1)$.

Пусть $P_X(x) = \frac{a}{m!}x^m + bx^{m-1} + \ldots$, тогда

$$\begin{aligned} P_{X \cap H}(x) &= \left(\frac{a}{m!}x^m + bx^{m-1} + \ldots\right) - \left(\frac{a}{m!}(x-1)^m + b(x-1)^{m-1} + \ldots\right) = \\ &= \left(\frac{a}{m!}x^m + bx^{m-1}\right) - \left(\frac{a}{m!}x^m - \frac{a}{m!}mx^{m-1} + bx^{m-1}\right) + \ldots = \frac{a}{(m-1)!}x^{m-1} + \ldots, \end{aligned}$$

откуда всё следует. □

Следствие 17. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие степени d. и $H \subset \mathbb{P}^n$ —* общее *гиперпространство такое, что* $\dim X + \dim H = n$. *Тогда $X \cap H$ состоит из d точек.*

Доказательство. Гиперпространство размерности $n - \dim X$ есть пересечение $\dim X$ гиперплоскостей. Пересекая X последовательно $\dim X$ общими гиперплоскостями, получим (согласно предыдущему предложению) многообразие размерности 0 и степени d. Остатся доказать, что степень объединения d точек как проективного многообразия равна d.

Действительно, пусть $Z = \{P_1, \dots, P_d\}$. Тогда имеется линейное отображение $R_i \to \mathsf{k}^d$, переводящее однородный многочлен в набор его значений в некоторых фиксированных координатах точек P_i. Его ядро — в точности $I(Z)_i$, а образ совпадает со всем k^d, если i достаточно велико. Поэтому $S(Z)_i \cong \mathsf{k}^d$ при больших i, значит многочлен Гильберта P_Z есть константа d и $\deg Z = d$, что и требовалось. □

Следствие 18. *Кривая $X \subset \mathbb{P}^2$ степени d пересекает «общую» прямую $H \subset \mathbb{P}^2$ по d точкам. Т.е., новое определение степени согласовано со старым.*

Многочлен Гильберта часто бывает несложно вычислить. Сделаем это для пересечения двух плоских кривых, что позволит завершить доказательство теоремы Безу.

Согласно замечанию 18 лекции 8, для доказательства теоремы Безу необходимо показать, что для многочленов $f, g \in \mathsf{k}[x, y]$ степеней m и n соответственно без общих множителей и без общих нулей на бесконечности верно $\dim \mathsf{k}[x, y]/(f, g) = mn$. Введём дополнительную переменную z и перейдём к проективным координатам, пусть $F(x, y, z) = z^m f(x/z, y/z)$, $G(x, y, z) = z^n g(x/z, y/z)$. Мы оставляем в качестве упражнения проверить, что при достаточно больших N естественное отображение

$$\mathsf{k}[x, y, z]/(F, G)_N \to \mathsf{k}[x, y]/(f, g)$$

является изоморфизмом. Таким образом, необходимо посчитать $\dim \mathsf{k}[x, y, z]/(F, G)_x$. Очевидно, $\dim \mathsf{k}[x, y, z]_x = C^2_{x+2} = \frac{(x+1)(x+2)}{2}$. Далее, $(\mathsf{k}[x, y, z]/F)_x \cong \mathsf{k}[x, y, z]_x / F \cdot \mathsf{k}[x, y, z]_{x-m}$, поэтому

$$\dim((\mathsf{k}[x, y, z]/F)_x) = \dim(\mathsf{k}[x, y, z]_x) - \dim(k[x, y, z]_{x-m}) = \frac{(x+1)(x+2)}{2} -$$
$$- \frac{(x-m+1)(x-m+2)}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + 3x + 2 - x^2 + x(2m-3) - (m-1)(m-2)) =$$
$$= \frac{1}{2}(x(2m) - m^2 + 3m) = xm + \frac{m(3-m)}{2}$$

Наконец, $(\mathsf{k}[x, y, z]/(F, G))_x \cong (\mathsf{k}[x, y, z]/F)_x / G \cdot (\mathsf{k}[x, y, z]/F)_{x-n}$, откуда

$$\dim((\mathsf{k}[x, y, z]/(F, G))_x) = \dim((\mathsf{k}[x, y, z]/F)_x) - \dim((\mathsf{k}[x, y, z]/F)_{x-n}) =$$
$$= xm + \frac{m(3-m)}{2} - (x-n)m - \frac{m(3-m)}{2} = mn.$$

Следовательно, $\dim \mathsf{k}[x, y]/(f, g) = mn$, ч.т.д.