Алгебраическая геометрия 1 | 28.11.2014 Лекция 10

Дивизоры на кривых

Заканчивая разговор об однородных координатных кольцах проективных многообразий, сформулируем для них теорему Гильберта о нулях. Предположим, что поле k алгебраически замкнуто и $R = \mathsf{k}[x_0, \dots, x_n]$.

Напомним, что всякому проективному многообразию $X \subset \mathbb{P}^n$ соответствует аффинный конус $\bar{X} \subset \mathbb{A}^{n+1}$ над X и однородный идеал $I(X) \subset R$, равный $I(\bar{X})$. С другой стороны, всякому однородному идеалу $J \subset R$ соответствует аффинное многообразие $V(J) \subset \mathbb{A}^{n+1}$ и проективное многообразие в $\mathbb{P}^n$, которое мы обозначим $V_P(J)$.

Обозначим через I_+ идеал $(x_0, \dots, x_n) \subset R$.

Теорема 1 (Гильберта о нулях, проективная форма)**.** *Пусть $J \subset \mathsf{k}[x_0, \dots, x_n]$ — однородный идеал. Тогда*

- *Если $\exists N \;\; J \supset I_+^N$, то $V_P(J) = \emptyset$ и $I(V_P(J)) = R$.*
- *Если $\nexists N \;\; J \supset I_+^N$, то $I(V_P(J)) = r(J)$.*

Доказательство. Если $\exists N \;\; J \supset I_+^N$, то

$$V(J) \subset V(I_+^N) \subset V(x_0^N, \dots, x_n^N) = \{(0, \dots, 0)\},$$

значит $V_P(J) = \emptyset$.

Верно и обратное следствие. Пусть $V_P(J) = \emptyset$, тогда $V(J) \subset \{(0, \dots, 0)\}$. Следовательно, $r(J) = I(V(J)) \supset I((0, \dots, 0)) = I_+$, значит $\exists N \; I_+^N \subset J$.

Докажем теперь вторую часть. Если $\nexists N \;\; J \supset I_+^N$, то $V(J)$ строго больше, чем $(0, \dots, 0)$, поэтому $I(V_P(J)) = I(V(J)) = r(J)$. □

Следствие 2. *Идеал $J \subset \mathsf{k}[x_0, \dots, x_n]$ определяет непустое проективное подмножество в $\mathbb{P}^n \iff J$ не содержит идеалов I_+^N.*

Теперь докажем, наконец, что регулярные функции на проективных многообразиях суть константы. Это будет следовать из значительно более общего и важного факта: образ любого проективного многообразия при регулярном отображении — замкнутое по Зарисскому подмножество.

Теорема 3. *Пусть X — проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем k, а $\phi \colon X \to Y$ — регулярное отображение в квазипроективное многообразие. Тогда $\phi(X)$ — замкнутое по Зарисскому подмножество в Y.*

Следствие 4. *Пусть X — связное проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем k. Тогда $\mathsf{k}[X] = \mathsf{k}$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathsf{k}[X]$. Рассмотрим f как регулярное отображение $X \to \mathbb{A}^1 \to \mathbb{P}^1$. По теореме 3, образ этого отображения — замкнутое подмножество в $\mathbb{P}^1$. Значит, это либо вся $\mathbb{P}^1$, либо конечое множество точек. Первое невозможно, так как образ содержится в $\mathbb{A}^1$. Если же образ состоит из точек $P_1, \dots, P_m$, то прообразы $f^{-1}(P_i)$ — непересекающиеся замкнутые множества, покрывающие весь X. Если $m > 1$, это противоречит связности, значит $f \equiv P_1$ — постоянная функция. □

Следствие 5. *Пусть $U \subset X \subset \mathbb{P}^n$ — открытое подмножество в замкнутом подмножестве проективного пространства и U — проективное многообразие. Тогда U — замкнутое подмножество в $\mathbb{P}^n$. В частности, если X связно, то $U = X$.*

Доказательство. Следует из теоремы 3, применённой к тождественному отображению $U \to \mathbb{P}^n$. □

Замечание 6. Заметим, что в аффинном случае дело обстоит по-другому. Нетривиальное открытое подмножество в аффинном многообразии может само оказаться аффинным многообразием. Например, такова аффинная прямая без точки.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим график отображения ϕ, т.е. подмножество $\Gamma = \{(x, \phi(x))\} \subset X \times Y$. Оно замкнуто, так как задано уравнениями $y = \phi(x)$. Образ Γ при проекции $p_2\colon X \times Y \to Y$ совпадает с $\phi(X)$, поэтому достаточно доказать следующее утверждение: проекция $p_2\colon X \times Y \to Y$ переводит любое замкнутое по Зарисскому подмножество $Z \subset X \times Y$ в замкнутое. Свойство «быть замкнутым» можно проверять локально на Y, поэтому заменяя Y на открытое аффинное подмножество $U \subset Y$, а Z на $Z \cap (X \times U)$, мы можем считать, что Y аффинно. Вкладывая Y замкнутым подмножеством в $\mathbb{A}^m$ и заменяя $X \times Y$ на $X \times \mathbb{A}^m$, можно свести доказательство к случаю $Y = \mathbb{A}^m$. Аналогично, вкладывая X как замнутое подмножество в некоторое проективное пространство $\mathbb{P}^n$, можно считать, что $X = \mathbb{P}^n$.

Итак, необходимо проверить, что проекция $p_2\colon \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^m$ переводит любое замкнутое по Зарисскому подмножество $Z \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ в замкнутое. Пусть Z — множество нулей многочленов $F_1, \dots, F_r \in \mathsf{k}[x_0, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$. Эти многочлены должны быть однородными многочленами от переменных $x_0, \dots, x_n$ (и не обязательно однородными многочленами от $y_1, \dots, y_m$). Пусть d_i — степень многочлена F_i относительно переменных x_j. Точка $y^0 = (y_1^0, \dots, y_m^0)$ лежит в образе $p_2(Z) \iff$ уравнения $F_i(x, y^0)$ имеют нетривиальное решение относительно переменных x_j. Согласно следствию 2, это равносильно тому, что идеал $(F_i(x, y^0)) \subset \mathsf{k}[x_0, \dots, x_n] = R$ не содержит ни одного из идеалов $(x_0, \dots, x_n)^N$.

Рассмотрим линейное отображение векторных пространств

$$\psi\colon \prod_{i=1}^{r} R_{N-d_i} \to R_N,$$

заданное формулой

$$(G_1, \dots, G_r) \mapsto \sum G_i F_i(x, y^0).$$

Это отображение сюръективно $\iff$ $(F_1(x, y^0), \dots, F_r(x, y^0)) \supset I_+^N$. с другой стороны, сюръективность этого отображения равносильна тому, что оно имеет ранг, равный $\dim R_N$. Это же равносильно тому, что некоторый минор порядка $\dim R_N$ матрицы этого линейного отображения не равен нулю. Коэффициенты этой матрицы — многочлены от переменных y_j, поэтому указанные выше условия состоят в отличии от нуля хотя бы одного из нескольких многочленов от $y_1, \dots, y_m$. Это открытое условие на y_j, а дополнительное к нему условие $(F_1(x, y^0), \dots, F_r(x, y^0)) \not\supset I_+^N$ — замкнутое. Следовательно, условия «идеал $(F_i(x, y^0)) \subset \mathsf{k}[x_0, \dots, x_n] = R$ не содержит ни одного из идеалов $(x_0, \dots, x_n)^N$» задают замкнутое подмножество в $\mathbb{A}^m$. □

В дальнейшем мы сосредоточимся на изучении проективных кривых. Пусть X обозначает неособую связную кривую над алгебраически замкнутым полем k.

Определение 7. *Дивизором* на кривой X называется выражение вида $\sum_{i=1}^{n} a_i P_i$, где $a_i \in \mathbb{Z}$, а P_i — точки кривой X. Сумма дивизоров и умножение дивизора на целое число определяются очевидным образом. Дивизоры на кривой X образуют группу по сложению, которую обозначают $\operatorname{Div} X$.

Определение 8. Дивизор $D = \sum_{i=1}^{n} a_i P_i$ называется *эффективным*, если все $a_i \geqslant 0$. Это записывают так: $D \geqslant 0$.

Пример 9. Всякую точку $P \in X$ можно рассмотреть как дивизор.

Пример 10. Если $P, Q, R \in X$ — точки, то можно рассмотреть дивизор $P - 2Q + 3R$.

Следующий пример крайне важен!

Пример 11. Пусть $f \in \mathsf{k}(X)$ — ненулевая рациональная функция. Определим *дивизор функции* f как

$$(f) = \sum_{P \in X} \nu_P(f),$$

где ν_p обозначает дискретное нормирование поля $\mathsf{k}(X)$, связанное с неособой точкой $P \in X$. Сумма здесь берётся по всем точкам кривой, однако от нуля отлично лишь конечное число слагаемых. Действительно, $\nu_P(f) \neq 0 \iff P$ — ноль или полюс функции f. Но полюса и нули рациональной функции образуют замкнутые подмножества в X, а они конечны.

Определение 12. Дивизоры вида (f) называются *главными* дивизорами.

Пример 13. Пусть $X = \mathbb{P}^1$ и $f(x) = \frac{x^2-4}{x+1}$. Записывая f в проективных координатах $(u : v) = (1 : x)$, получим $f(u, v) = \frac{v^2-4u^2}{u(u+v)}$. Эта фукнция имеет нули кратности 1 в точках $P_{\pm 2} = (1 : \pm 2)$ и полюса кратности 1 в точках $P_{-1} = (1 : -1)$ и $P_\infty = (0 : 1)$. Значит,

$$(f) = P_2 + P_{-2} - P_{-1} - P_\infty.$$

Предложение 14. *1. Для $f, g \in \mathsf{k}(X)$ имеем $(fg) = (f) + (g)$ и $(f^{-1}) = -(f)$.*

2. Если X проективна, то $(f) = 0 \iff f \in \mathsf{k}$.

Доказательство. 1. Следует из того, что $\nu_P(fg) = \nu_P(f) + \nu_P(g)$ и $\nu_P(f^{-1}) = -\nu_P(f)$.

2. Если $(f) = 0$, то у f нет полюсов на X, т.е. f регулярна на проективной кривой X. По следствию 4, $f \in \mathsf{k}$.

□

Следствие 15. *Главные дивизоры образуют подгруппу по сложению в* $\operatorname{Div} X$.

Определение 16. Факторгруппа группы $\operatorname{Div} X$ по подгруппе главных дивизоров называется *группой классов дивизоров*, она обозначается $\operatorname{Cl} X$.

Дивизоры D_1 и D_2 называются *линейно эквивалентными*, если их классы в группе классов дивизоров совпадают, т.е. если $D_1 - D_2$ — главный дивизор. Обозначение: $D_1 \sim D_2$.

Пример 17. Имеет место $\mathrm{Cl}\,\mathbb{A}^1 \cong 0$. Другими словами, любой дивизор на $\mathbb{A}^1$ главный.

Действительно, для дивизора $D = \sum a_i P_i$, где $P_i = x_i$ — точки $\mathbb{A}^1$, можно рассмотреть рациональную функцию $f(x) = \prod_i (x - x_i)^{a_i}$. Тогда $(f) = D$.

Определение 18. *Степенью* дивизора $D = \sum a_i P_i$ называется число $\sum a_i$. Обозначение: $\deg D$.

Пример 19. Имеет место $\mathrm{Cl}\,\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{Z}$, изоморфизм задаётся степенью. Другими словами, главные дивизоры на $\mathbb{P}^1$ — это дивизоры степени 0.

Действительно, для рациональной функции $f = F/G$ на $\mathbb{P}^1$ имеем $F = \prod_{i=1}^d (a_i x + b_i y)$ и $G = \prod_{i=1}^d (c_i x + d_i y)$, так что $(f) = \sum (b_i : -a_i) - \sum (d_i : -c_i)$ — дивизор степени ноль. Эти же формулы позволяют по любому дивизору D степени ноль написать рациональную функцию f, для которой $D = (f)$.

Для произвольной кривой верно следующее:

Предложение 20. *Пусть $D = (f)$ — главный дивизор на гладкой проективной кривой. Тогда $\deg D = 0$.*

Это утверждение, хотя и может показаться очевидным, в действительности не элементарно. Как скоро будет видно, из него почти сразу вытекает теорема Безу для случая, когда одна из кривых гладкая. Из-за недостатка времени мы не будем доказывать это предложение.

Предложение 21. *Степень является сюръективным гомоморфизмом групп из $\mathrm{Div}\,X$ в Z. Если кривая X проективна, то имеется гомоморфизм степени $\mathrm{Cl}(X) \to Z$.*

Доказательство. Первое очевидно, второе следует из предложения 20. □

Предложение 22. *Пусть X — гладкая проективная кривая. Тогда $\mathrm{Cl}(X) \cong Z$ равносильно $X \cong \mathbb{P}^1$.*

Доказательство. Следствие $\Longleftarrow$ проверено в примере 19, проверим $\Longrightarrow$. Возьмём две различные точки $P_0, P_\infty \in X$ и рассмотрим дивизор $D = P_0 - P_\infty$. Он имеет степень ноль, значит существует рациональная функция f, для которой $(f) = D$. Рассмотрим f как отображение $\phi_f \colon X \to \mathbb{P}^1$, оно будет регулярным. По определению D, имеем $\phi_f^{-1}(0) = P_0, \phi_f^{-1}(\infty) = P_\infty$. При этом ϕ_f сюръективно, так как образ замкнут и содержит больше одной точки. Проверим, что ϕ_f инъективно. Действительно, прообразы точки $t \in \mathbb{P}^1$ суть нули функции $f - t$. По предложению 20, их число с учётом кратностей равно числу полюсов $f - t$, а оно равно числу полюсов f, т.е. 1. Значит, ϕ_f — регулярная биекция между гладкими кривыми, следовательно ϕ_f — изоморфизм. □

Теперь мы определим ещё одно важное семейство дивизоров. Предположим, что кривая X вложена в проективное пространство $\mathbb{P}^n$, а $H_F \subset \mathbb{P}^n$ — гиперповерхность, заданная уравнением $F = 0$, где $F \in \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ — однородный многочлен степени m. Предположим, что X не содержится в H_F.

Определим *дивизор пересечения* $X \cdot H_F$ равенством

$$X \cdot H_F = \sum_{P \in X \cap H} \operatorname{ord}_P F \cdot P,$$

где кратности $\operatorname{ord}_P F$ определяются следующим образом. Выберем произвольный однородный многочлен G от $x_0, \ldots, x_n$ степени m такой, что $G(P) \neq 0$, и положим $\operatorname{ord}_P F = \nu_P(\frac{F}{G})$. (Здесь $\frac{F}{G} = \frac{F}{G}|_X$ — регулярная в окрестности точки P функция на X, и порядок её нуля корректно определён.)

Это определение не зависит от выбора G, так как для другого G_1 мы получим

$$\nu_P\left(\frac{F}{G_1}\right) = \nu_P\left(\frac{F}{G} \cdot \frac{G}{G_1}\right) = \nu_P\left(\frac{F}{G}\right) + \nu_P\left(\frac{G}{G_1}\right) = \nu_P\left(\frac{F}{G}\right),$$

где $\nu_P \frac{G}{G_1}$ равно нулю, так как G/G_1 регулярна в P и обратима в $\mathcal{O}_{X,P}$. Также из определения ясно, что дивизор $X \cdot H_F$ эффективный.

Предложение 23. *1. Если F_1, F_2 — два однородных многочлена одинаковой степени, то дивизоры $X \cdot H_{F_1}$ и $X \cdot H_{F_2}$ линейно эквивалентны.*

2. Если F — однородный многочлен степени m, то $X \cdot H_F \sim m(X \cdot H_{x_0})$. Другими словами, все дивизоры пересечения X с гиперповерхностями — это кратные некоторого дивизора с точностью до линейной эквивалентности.

Доказательство. 1. Из определения следует, что $X \cdot H_{F_1} = X \cdot H_{F_2} + (F_1/F_2)$, так как

$$\nu_P(F_1/G) = \nu_P(F_2/G) + \nu_P(F_1/F_2).$$

2. Следует из части 1, применённой к $F_2 = x_0^m$.

$\square$

Заметим, что из предложений 20 и 23 следует теорема Безу для пересечения гладкой кривой X с произвольной кривой H_F. Действительно, степень дивизора $X \cdot H_F$ — это сумма его коэффициентов, т.е. кратностей пересечения X и H_F. С другой стороны, она равна степени дивизора $m(X \cdot H_{x_i})$, которая очевидно равна $m \cdot \deg X = \deg H_F \cdot \deg X$.