Алгебраическая геометрия 1 — 19.09.2014 — Листок 2

Прямые и коники

Поле k в этом листке имеет характеристику ноль.

Задача 1. Пусть $L \subset \mathbb{P}^2$ — прямая. Покажите, что одно из отображений $(x, y, z) \mapsto (x, y)$, $(x, y, z) \mapsto (x, z)$, $(x, y, z) \mapsto (y, z)$ является изоморфизмом L с $\mathbb{P}^1$. Это позволяет ввести на L координаты.

Задача 2. Пусть L_1 и $L_2 \subset \mathbb{P}^2$ — прямые, заданные уравнениями $x + y + z = 0$ и $x - 2y - z = 0$. Пусть $A = (1 : 0 : 0)$, $B = (1 : 1 : 1) \in \mathbb{P}^2$ — точки. Обозначим через $\pi_A, \pi_B \colon L_1 \to L_2$ проекции из A, B соответственно с L_1 на L_2. Введём на L_1 координаты: $L_1 = \{(x : y : -x - y)\}$.

a) Запишите в координатах проекции из этих точек с L_1 в L_2.

b°) Запишите в координатах отображение $\pi_B^{-1}\pi_A \colon L_1 \to L_1$ и найдите его неподвижные точки.

c) Любая ли регулярная биекция из L_1 в L_2 задаётся как проекция из точки?

Коникой называется кривая степени 2 в $\mathbb{P}^2$, т.е. множество нулей однородного многочлена степени 2.

Задача 3. Докажите, что коника является двойной прямой, парой прямых либо её уравнение заменой координат приводится к виду $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, где $a, b, c \neq 0$. В последнем случае коника называется *неособой*.

Задача 4. Пусть $P \in C$ – точка на неособой конике, а $L \subset \mathbb{P}^2$ – произвольная прямая, не содержащая P.

a) Покажите, что проекция из P: $C \xrightarrow{\pi} L$ – изоморфизм. Куда переходит точка P?

b) [рациональная параметризация коники] Покажите, что найдутся такие квадратные трёхчлены $\phi_1(t), \phi_2(t)$ и $\phi_3(t)$, что точки $(\phi_1(t) : \phi_2(t) : \phi_3(t)), t \in \mathsf{k}$ пробегают (почти) всю конику C.

c) Обратно, пусть $\phi_1(t), \phi_2(t)$ и $\phi_3(t)$ — линейно независимые квадратные трёхчлены. Покажите, что точки $(\phi_1(t) : \phi_2(t) : \phi_3(t))$ пробегают некоторую конику.

Подсказка: не бойтесь заменять координаты.

d) Пусть C и L задаются уравнениями $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ и $x_0 = 0$ соответственно, а $P = (1 : 1 : 0)$. Запишите π и обратное к π отображение в координатах.

Задача 5. a°) Покажите, что неособая коника над k пуста либо изоморфна $\mathbb{P}^1_{\mathsf{k}}$.

b) Пользуясь задачей 2d, покажите, что все рациональные точки на окружности $x^2 + y^2 = 1$ имеют вид

$$\left(\frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}, \frac{2pq}{p^2 + q^2}\right),$$

где $p, q \in \mathbb{Z}$.

c) Решите в целых числах уравнение $x^2 + y^2 = z^2$.

d) Найдите все рациональные точки на конике $x^2 + 3y^2 = 1$.

e) Решите в целых числах уравнение $x^2 + 3y^2 = z^2$.

Задача 6. Докажите теорему Безу для пересечений с коникой.

Алгебраическая геометрия 1

19.09.2014
Листок 2

Полярное соответствие. Пусть V – 3-мерное векторное пространство, Q – невырожденная симметричная билинейная форма, а q – соответствующая квадратичная форма на V. Всякой точке $P \in \mathbb{P}(V)$ сопоставим прямую $P^\times$ в $\mathbb{P}(V)$, состоящую из тех точек S, для которых $Q(l_P, l_S) = 0$ (где l_P и l_S – прямые в V). Прямая $P^\times$ называется полярой точки P, а P – полярой $P^\times$.

Задача 7. a) Покажите, что полярное соответствие — это биекция между точками и прямыми в $\mathbb{P}(V)$.

b) Запишите его в координатах, выбрав координаты удобным образом.

Задача 8. a) Покажите, что поляра точки строится так. Пусть PS_1 и PS_2 – касательные к конике C, задаваемой уравнением $q = 0$, причём $S_1, S_2 \in$. Тогда S_1S_2 – поляра P.

b) Что есть поляра точки, лежащей на C?

c) Как (геометрически) строится поляра прямой?

Задача 9. a) Покажите, что для любых точек $P \neq Q \in \mathbb{P}(V)$ верно $(PQ)^\times = P^\times \cap Q^\times$, и для любых прямых $l, m \subset \mathbb{P}(V)$ верно $l^\times m^\times = (l \cap m)^\times$.

b) Сформулируйте любое из утверждений предыдущего пункта в терминах кривой C и касательных, не пользуясь понятием поляры.