Алгебраическая геометрия 1 — 26.09.2014 — Листок 3

Бесконечно удалённые точки

Задача 1. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ — алгебраическое подмножество, $\mathbb{A}^n \cong U_0 \subset \mathbb{P}^n$ — аффинная карта, и $\mathbb{P}^{n-1} \cong H = \mathbb{P}^n \setminus U_0$. Верно ли, что:

a) X неприводимо $\Rightarrow X \cap U_0$ неприводимо;

b) X неприводимо $\Rightarrow X \cap H$ неприводимо;

c) $X \cap U_0$ неприводимо $\Rightarrow X$ неприводимо;

d) $X \cap H$ неприводимо $\Rightarrow X$ неприводимо?

Докажите или приведите контрпримеры.

Задача 2. Пусть $f \in \mathbb{C}[x, y]$ — многочлен степени n. Пусть $C_0, C_1 \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ — плоские кривые, заданные уравнениями $f(x, y) = 0$ и $f(x, y) = 1$ соответственно, а $\overline{C_0}, \overline{C_1} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ — их проективные замыкания.

a°) Покажите, что $1 \leqslant |\overline{C_0} \cap \overline{C_1}| \leqslant n$.

b°) Приведите примеры, когда $|\overline{C_0} \cap \overline{C_1}| = 1$ и $|\overline{C_0} \cap \overline{C_1}| = n$.

Задача 3. Опишите множество бесконечно удалённых точек поверхностей в $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$, заданных уравнениями:

a) $xy - z^2 = 1$;

b) $x^2 - y^2 - z = 0$;

c) $(x + y)^2 - x - 2z - 1 = 0$.

Задача 4. Пусть C — кривая в $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, заданная уравнением $y^2 = x^3 + x^2$, а $\overline{C}$ — её проективное замыкание. Запишите уравнения пересечений $\overline{C}$ с тремя аффинными картами в $\mathbb{P}^3$ и нарисуйте их, отметив бесконечно удалённые точки.

Задача 5. Пусть C — кривая в $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, заданная уравнением $f(x, y) = 0$, а $\overline{C}$ — её проективное замыкание. Пусть $\phi\colon C \to \mathbb{A}^1$ — отображение, заданное формулой $\phi(x, y) = x$. Продолжается ли ϕ до регулярного отображения $\overline{C} \to \mathbb{P}^1$? Куда при этом переходят бесконечно удалённые точки? Решите задачу для

a) $f(x, y) = y^2 - x^3 + 1$;

b) $f(x, y) = xy - x - y - 1$;

c) $f(x, y) = x^2 - y^2 - 1$;

d) $f(x, y) = x^3 - y$;

e°) $f(x, y) = xy(x + y) - 1$.

Задача 6. Пусть $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}^2$ — точки на $\mathbb{P}^2_{\mathsf{k}}$, предположим, что поле k бесконечно. Покажите, что существует такое аффинное открытое множество $U \subset \mathbb{P}^2$, что $\forall i\ P_i \in U$.

Задача 7. Пусть $P_1, \dots, P_k$ и $Q_1, \dots, Q_k$ — два набора попарно различных точек на $\mathbb{A}^2_{\mathsf{k}}$, предположим, что поле k бесконечно. Покажите, что существует изоморфизм $\phi\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$, переводящий P_i в Q_i при всех i.

Задача 8*. Докажите, что для $\mathbb{P}^2$ утверждение предыдущей задачи неверно.