Многообразия и регулярные отображения

Поле k в этом листке считается алгебраически замкнутым.

Задача 1. Пусть $Y \subset X \subset \mathbb{A}^n$ — алгебраические подмножества и $I_X(Y) \subset \mathsf{k}[X]$ — идеал, образованный такими фунциями $f \in \mathsf{k}[X]$, что $f|_Y = 0$. Покажите, что $\mathsf{k}[Y] \cong \mathsf{k}[X]/I_X(Y)$.

Задача 2. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — алгебраическое подмножество. Покажите, что $\mathsf{k}[X]$ — конечномерное над k векторное пространство $\iff$ X — конечное множество точек.

Задача 3. a°) Какие из следующих аффинных кривых изоморфны друг другу:

$$V(xy), V(x^2-1), V(x(x^2-y))?$$

b) Кому из них изоморфна кривая $V(x(x-y^2))$?

Задача 4. a) Покажите, что $\mathsf{k}[\mathbb{A}^2 \setminus 0] = \mathsf{k}[x, y]$.

b) Покажите, что квазиаффинное многообразие $\mathbb{A}^2 \setminus 0$ не аффинно.

Задача 5. a) Пусть $\phi\colon X \to Y$ — регулярное отображение между аффинными многообразиями, а $Y' \subset Y$ — замкнутое по Зарисскому подмножество. Покажите, что $X' = \phi^{-1}(Y')$ — аффинное подмногообразие в X.

b) Сформулируйте и докажите аналог для проективных многообразий.

Задача 6. Пусть $L \subset \mathbb{P}^2$ — проективная прямая, а $P \in \mathbb{P}^2$ — точка, $P \notin L$.

a) Покажите, что проекция из P на L — регулярное отображение $\mathbb{P}^2 \setminus P \to L$.

b) Изоморфны ли $\mathbb{P}^2 \setminus P$ и $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1$?

c) Покажите, что квазипроективное многообразие $\mathbb{P}^2 \setminus P$ не проективно.

Задача 7. a) Пусть отображение $\phi\colon \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ задано формулой

$$\phi(t) = (t^2-1, t(t^2-1)).$$

b) Покажите, что образ ϕ — плоская алгебраическая кривая C, найдите её уравнение.

c) Будет ли отображение $\phi\colon \mathbb{A}^1 \to C$ биекцией? Изоморфизмом?

d) Продолжите ϕ до отображения $\mathbb{P}^1 \to \overline{C}$ в проективное замыкание кривой C. Куда переходит бесконечно удалённая точка?

Рассмотрим отображение $\sigma\colon \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \to \mathbb{P}^{rs+r+s}$, заданное формулой

$$((x_0 : x_1 : \ldots : x_r), (y_0 : y_1 : \ldots : y_s)) \mapsto$$
$$\mapsto (x_0y_0 : x_0y_1 : \ldots : x_0y_s : x_1y_0 : x_1y_1 : \ldots) = (x_iy_j)_{i=0\ldots r, j=0\ldots s}.$$

Оно называется *вложением Сегре*.

Задача 8. a°) Покажите, что $Z = \operatorname{im}\sigma \subset \mathbb{P}^{rs+r+s}$ – алгебраическое подмножество, определённое уравнениями $z_{ij}z_{kl} - z_{il}z_{kj}$.

b°) Покажите, что σ задаёт изоморфизм $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s$ с Z.

c) Покажите, что многочлены $z_{ij}z_{kl} - z_{il}z_{kj}$ порождают идеал Z.

d) Покажите, что прямое произведение проективных многообразий — проективное многообразие.