Алгебраическая
геометрия 1

17.10.2014
Листок 6

Образы, прообразы и полюса

Поле k в этом листке считается алгебраически замкнутым.

Задача 1. Опишите прообразы точек при регулярном отображении

$$\mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1 \colon \phi(x,y) = x^2 - y^2.$$

Задача 2. Пусть поверхность $X \subset \mathbb{A}^3$ задана уравнением $y^2 = x^3 - 3x + z$. Опишите прообразы точек

a) при проекции $X \to \mathbb{A}^1 \colon p(x,y,z) = z$;

b) при проекции $X \to \mathbb{A}^2 \colon p(x,y,z) = (y,z)$.

Не забывайте рисовать картинки!

Задача 3. Найдите прообразы идеалов (x^2), $(x-1)$, $(x+1)$ для гомоморфизма $\mathsf{k}[x,y] \to \mathsf{k}[z]$, $p(x,y) \mapsto p(z,z^2)$.

Задача 4. Под образом идеала ниже имеется в виду идеал, порождённый образами всех элементов.

a) Найдите образ идеала $(x-a, y-b)$ при гомоморфизме $f \colon \mathsf{k}[x,y] \to \mathsf{k}[z]$, $p(x,y) \mapsto p(z,z)$.

b°) Найдите образы идеалов $(y-1)$, $(x-y)$, $(2x-y-1)$ для гомоморфизма $\mathsf{k}[x,y] \to \mathsf{k}[z]$, $p(x,y) \mapsto p(z,z^2)$.

Подсказка: какую геометрическую картину описывает задача?

Задача 5. Пусть $P_1, \ldots, P_n$ и $Q_1, \ldots, Q_m \in \mathbb{P}^1$ — два непустых набора точек. Постройте рациональную функцию на $\mathbb{P}^1$, для которой P_i и Q_i будут множествами нулей и полюсов соответственно.

Задача 6. Пусть $X \subset \mathbb{A}^2$ — плоская кривая, заданная уравнением $y^2 - x^3 - x^2 = 0$, пусть $z = y/x$. Найдите множество полюсов функций z и z^2.

Задача 7°. Пусть $X \subset \mathbb{P}^3$ — поверхность, заданная уравнением $xw - yz = 0$. Найдите множества нулей и полюсов рациональной функции x/y на X. Пересекаются ли они?

Задача 8. Покажите, что локальное кольцо точки на алгебраическом многообразии нётерово.