Алгебраическая геометрия 1

24.10.2014
Листок 7

Особенности плоских кривых

Поле k в этом листке – алгебраически замкнутое характеристики ноль.

Задача 1°. При каких значениях a кривая, заданная уравнением $x_0^3+x_1^3+x_2^3+a(x_0+x_1+x_2)^3=0$ в $\mathbb{P}^2$, имеет особые точки? Найдите их. Будет ли кривая приводимой?

Задача 2. Найдите особые точки следующих аффинных кривых:

a) $x^2=x^4+y^4$,

b) $xy=x^6+y^6$,

c) $x^3=y^2+x^4+y^4$,

$d°$) $x^2y+xy^2=x^4+y^4$.

Нарисуйте эти кривые.

Запишем многочлен $f\in\mathsf{k}[x,y]$ в виде $f=f_0+f_1+f_2+\ldots$, где f_i – однородные многочлены от x и y степени i. Если r – минимальное такое, что $f_r\neq 0$, то $\mu_P=r$ называется *кратностью* точки $P=(0,0)$ на кривой. Особенность называется *простой* (или *обыкновенной*) *двойной*, если f_2 – произведение непропорциональных линейных форм. Особенность называется *каспидальной*, если $f_2=l^2$ для некоторой линейной формы l, и f_3 не делится на l.

Задача 3. Покажите, что точка $P=(0,0)$ лежит на кривой $C \iff f_0=0$, она особая $\iff f_1=0$.

Задача 4. Пусть P – особая точка кратности r. Покажите, что для всякой прямой $L\ni P$, кроме конечного числа, ограничение f на L имеет в точке P нуль порядка r, а для конечного числа прямых кратность нуля больше r. Эти прямые называются *касательными* к C в точке P. Если в точке кратности r имеется r различных касательных, то особенность называется *обыкновенной* r-кратной.

Задача 5. a) Найдите кратность особенностей и касательные для кривых из задачи 2.
b) Напишите уравнение аффинной кривой, имеющей ровно r обыкновенных двойных особых точек.

Задача 6. a) Покажите, что кривая степени d, имеющая особую точку кратности $d-1$, рациональна.

b^*) Покажите, что для любой (не обязательно плоской) неособой проективной кривой C имеется бирациональный морфизм $C\to\mathbb{P}^2$, образ которого – кривая, имеющая не более, чем обыкновенные двойные особенности.

Поведение особенностей заметно упрощается при переходе к формальным координатам, т.е. к замене многочленов на степенные ряды.

Задача 7. a) Докажите, что из степенного ряда от нескольких переменных вида $1+\ldots$ (члены старших степеней) можно извлечь корень любой степени.

b) Пусть $l(x,y)$ и $m(x,y)$ – непропорциональные линейные формы, а $h=l+h_2+\ldots, g=m+g_2+\ldots$ – степенные ряды. Докажите что существует автоморфизм алгебры $\mathsf{k}[[x,y]]$, переводящий x и y в h и g соответственно.

Задача 8. a) Пусть кривая $f=0$ имеет простую двойную особенность. Покажите, что существует разложение $f=h\cdot g$ в произведение степенных рядов $h,g\in\mathsf{k}[x,y]$ вида $h=h_1+h_2+\ldots, g=g_1+g_2+\ldots$.

Учитывая задачу 7b, говорят, что кривая $f=0$ *формально*, или *аналитически* изоморфна кривой $xy=0$ – объединению двух прямых.

b) Покажите, что каспидальная особенность формально изоморфна особенности $x^2=y^3$.

c) Покажите, что любая особенность кратности 2 аналитически изоморфна особенности $xy=0$ или $x^2=y^r$, где $r\geqslant 3$.