Алгебраическая геометрия 1 — 31.10.2014, Листок 8

Особенности кривых — 2

Поле k в этом листке – алгебраически замкнутое.

Задача 1. Рассмотрим кривую X в $\mathbb{A}^3$, заданную уравнениями $x^2 - y^3 = y^2 - z^3 = 0$.

a) Покажите, что X задаётся параметрически: $(x, y, z)(t) = (t^9, t^6, t^4)$.

b) Найдите размерность касательного пространства к X в $(0, 0, 0)$.

Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ – алгебраическое подмножество. Напомним, что *строгий прообраз* X при раздутии $\sigma\colon \widetilde{\mathbb{A}^n} \to \mathbb{A}^n$ в точке P определяется как замыкание (как записать его в координатах?)

$$\widetilde{X} = \overline{\sigma^{-1}(X \setminus P)}.$$

Пусть $P \in C$ – точка на плоской кривой, $\sigma\colon \widetilde{\mathbb{A}^2} \to \mathbb{A}^2$ – раздутие P, $E = \sigma^{-1}(P) \subset \widetilde{\mathbb{A}^2}$, а $\widetilde{C} \subset \widetilde{\mathbb{A}^2}$ — строгий прообраз C.

Задача 2. a) Пусть C – кривая, неособая в P. Тогда $\widetilde{C}$ пересекает E трансверсально в одной точке, соответствующей касательной к C в P.

b) Пусть $C = \cup L_i$ – объединение прямых, проходящих через P. Тогда $\widetilde{C} = \cup \widetilde{C}_i$ – объединение непересекающихся прямых.

c) Пусть P – каспидальная точка C. Тогда $\widetilde{C}$ имеет касание с E порядка 2.

d) Покажите, что в общем случае $E \cap \widetilde{C}$ состоит из конечного числа точек, отвечающих касательным в P к C.

e^*) Опишите $E \cap \widetilde{X}$ для $X \subset \mathbb{A}^n$ – произвольной гиперповерхности.

Вводя на раздутии плоскости локальные координаты, можно раздуть особенности строгого прообраза плоской кривой, потом его строго прообраза, и т.д. Можно показать, что в итоге получится неособая кривая.

Задача 3. Сделайте это для особенности $(0, 0)$ следующих кривых:

a°) $x^2 = x^4 + y^4$,

b) $xy = x^6 + y^6$,

c) $x^3 = y^2 + x^4 + y^4$,

d) $x^2y + xy^2 = x^4 + y^4$.

Задача 4. Сделайте это для особенности на бесконечности кривой $y^2 = p(x)$, где $p \in \mathsf{k}[x]$ — многочлен без кратных корней степени n. Сколько будет прообразов у особой точки?

Задача 5. Найдите попарные индексы пересечения в точке $(0, 0)$ следующих кривых:

a) $y - x^2 = 0$,

b) $y^2 - x^3 = 0$,

c°) $(x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$,

d) $(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$.

Не забывайте рисовать картинки!