Алгебраическая геометрия 1

21.11.2014
Листок 9

Многочлен Гильберта

Поле k и в этом листке считается алгебраически замкнутым.

Задача 1. Пусть $I \subset \mathsf{k}[x_0, \dots, x_n]$ — однородный идеал. Покажите, что:

a°) идеал I прост $\iff$ для любых однородных многоленов F, G из $FG \in I$ следует $F \in I$ или $G \in I$.

b) идеал $r(I)$ — однородный.

Задача 2. Покажите, что любая неприводимая компонента конуса над проективным многообразием — конус над некоторым проективным многообразием.

Определим оператор Δ на множестве функций $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$: $\Delta(f)(k) = f(k+1) - f(k)$.

Задача 3. Проверьте, что:

a) Если $f \in \mathbb{Q}[x]$ – многочлен степени d, то Δf – многочлен степени $d-1$.

b) Δ – сюръекция из многочленов степени $\leqslant n$ в многочлены степени $\leqslant n-1$, причём $\ker \Delta$ состоит из констант.

c) Если Δf – многочлен, то f – многочлен.

Многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ называется *целозначным*, если $f(n) \in \mathbb{Z}$ при всех $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. Докажите, что

a) многочлены $C_x^m = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-m+1)}{m!}$ при $m \geqslant 0$ целозначны, при этом $\Delta(C_x^m) = C_x^{m-1}$.

b) Любой целозначный многочлен представляется в виде $\sum_{i=0}^d a_i C_x^i$, $a_i \in \mathbb{Z}$.

c) Если $P(x)$ – целозначный многочлен степени d, то $P(x) = a\frac{x^d}{d!} + \dots$, где $a \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. Пусть $p, q \in \mathsf{k}[x, y]$ — взаимно простые многочлены степеней m, n соответственно, предположим, что старшие однородные слагаемые p_m и q_n также взаимно просты. Проверьте, что

a) При $N \geqslant m + n$ любой однородный многочлен степени N лежит в идеале (p_m, q_n).

b) Любой $h \in (p, q)$ представляется в виде $up + vq + h_0$, где $\deg h_0 \leqslant m+n$, а $\deg up, \deg vq \leqslant \deg h$.

c) $\exists N$ такое, что если $h \in (p, q)$ и $\deg h > N$, то h представляется в виде $up + vq$, где $u, v \in \mathsf{k}[x, y]$, причём $\deg up, \deg vq \leqslant \deg h$.

d) Пусть $P(x, y, z) = z^m p(x/z, y/z)$, $Q(x, y, z) = z^n q(x/z, y/z)$. Покажите, что при больших N имеется изоморфизм $(\mathsf{k}[x, y, z]/(P, Q))_N \cong \mathsf{k}[x, y](p, q)$.

Задача 6. Вычислите многочлен Гильберта для следующих проективных многообразий:

a) гиперповерхности степени d в $\mathbb{P}^n$;

b°) (невырожденного) пересечения поверхностей степеней d_1 и d_2 в $\mathbb{P}^3$;

c) образа вложения Сегре $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{mn+m+n}$.

Задача 7 (Вложение Веронезе). Вложением Веронезе (или n-кратным вложением) называется отображение $\mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^N$:

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_m) \mapsto (x_0^n : x_0^{n-1} x_1 : \ldots (\text{все мономы степени } n \text{ от } x_0, \dots, x_m) \ldots).$$

a) Проверьте, что это действительно вложение, постройте обратное отображение.

b°) Найдите степень и многочлен Гильберта образа $\mathbb{P}^1$ при n-кратном вложении Веронезе $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$.

c) Найдите степень и многочлен Гильберта образа $\mathbb{P}^m$ при n-кратном вложении Веронезе $\mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^N$.

Образ $\mathbb{P}^1$ при n-кратном вложении называется *нормальной рациональной кривой* в $\mathbb{P}^n$.