Геометрия: листок 1. Проективная геометрия (8 сентября 2014)

Задача 1. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — точки прямой l_1. Докажите, что при проецировании прямой l_1 на прямую l_2 из некоторой точки O величина $\frac{C_1A_1}{C_1B_1} : \frac{D_1A_1}{D_1B_1}$ сохраняется.

Введём на прямой l координаты и будем вместо, например, CA брать $c - a$, где c и a — координаты точек C и A. Величину $\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$ называют *двойным отношением* четырёх точек и обозначают $[A, B, C, D]$.

Задача 2. Двойное отношение четырёх точек равно λ. Какие значения может принимать двойное отношение тех же самых четырёх точек, взятых в другом порядке?

Назовём преобразование прямой *проективным*, если оно сохраняет двойное отношение любых четырёх точек.

Отображение вида $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, где $ad \neq bc$, назовём *дробно-линейным.*

Задача 3. Докажите, что преобразование прямой проективно тогда и только тогда, когда оно дробно-линейно.

Дробно-линейное преобразование $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ не определено для точки $x = -d/c$. Чтобы избежать этой неприятности, добавим к прямой l точку ∞ следующим образом. Выберем точку O вне прямой l и сопоставим каждой точке $A \in l$ прямую OA. Тогда точке ∞ соответствует прямая, проходящая через точку O параллельно прямой l. Назовём *проективной прямой* множество всех прямых на плоскости, проходящих через фиксированную точку O.

Пусть O — начало системы координат на плоскости. Тогда точке проективной прямой (т.е. прямой, проходящей через точку O) можно сопоставить пару чисел (x, y) — координаты точки на этой прямой, причём пары (x, y) и $(\lambda x, \lambda y)$ считаются эквивалентными. Эту пару чисел назовём *однородными координатами* точки проективной прямой.

Задача 4. Докажите, что в однородных координатах проективное преобразование проективной прямой имеет вид $(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$.

Задача 5. Докажите, что проективное преобразование прямой однозначно задаётся образами трёх точек.

Задача 6. Докажите, что любое проективное преобразование прямой можно представить в виде композиции проецирований прямых.

Задача 7. Назовём четверку точек $\{a, b, c, d\}$ *гармонической*, если $[a, b, c, d] = -1$. Пусть f — некоторое преобразование проективной прямой, переводящее любую гармоническую четверку точек в гармоническую четверку точек. Докажите, что тогда f — проективное преобразование.

Задача 8. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, а продолжения его сторон пересекаются в точках E и F. Прямая AC пересекает прямую EF в точке P. Докажите, что $\{A, C, O, P\}$ — гармоническая четвёрка точек.

Задача 9. Докажите, что существует проективное преобразование плоскости, которое переводит данную прямую в бесконечно удалённую.

Задача 10. Докажите теорему Дезарга: если прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, то точки пересечения прямых BC и B_1C_1, AC и A_1C_1, AB и A_1B_1 лежат на одной прямой.

Задача 11. Докажите теорему Паппа: пусть точки A, B и C лежат на одной прямой, а точки A_1, B_1 и C_1 лежат на другой прямой, тогда точки пересечения прямых B_1C и BC_1, A_1C и AC_1, A_1B и AB_1 лежат на одной прямой.

Задача 12. Докажите, что существует проективное преобразование, которое данный круг отображает на себя, а данную точку внутри круга переводит в его центр.

Задача 13. Докажите, что с помощью одной линейки (без циркуля) нельзя построить центр данной окружности.