Геометрия: листок 2. Конические сечения (15 сентября 2014)

Эллипсом называется кривая, задаваемая в некоторой прямоугольной системе координат уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a \geqslant b)$; *парабола* задаётся уравнением $y^2 = 2px$; *гипербола* задаётся уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. *Фокусами* эллипса (гиперболы) называются точки с координатами $(\pm c, 0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$ $(c=\sqrt{a^2+b^2})$; *фокусом* параболы называется точка с координатами $\left(\frac{p}{2},0\right)$. Числа $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$, $\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$, 1 называются *эксцентриситетами* эллипса, гиперболы, параболы. Прямые $x=\pm\frac{a}{e}$ называются *директрисами* эллипса и гиперболы; прямая $x=-\frac{p}{2}$ — *директрисой* параболы. Прямая $y=0$ называется *осью* параболы.

Задача 1. Докажите, что отношение расстояний от точки эллипса, гиперболы, параболы до (соответствующего) фокуса и до (соответствующей) директрисы равно e.

Задача 2. Докажите, что: сумма расстояний от точки эллипса до его фокусов постоянна; модуль разности расстояний от точки гиперболы до её фокусов постоянен.

Задача 3. Докажите, что середины параллельных хорд эллипса, параболы, гиперболы лежат на одной прямой.

Задача 4. а) Докажите, что пучок лучей света, исходящих из одного фокуса эллипса, после отражения от эллипса сходится в другом фокусе.

б) Докажите, что пучок лучей света, параллельных оси параболы, после отражения от параболы сходится в её фокусе.

Задача 5. Докажите, что проекцией окружности может быть парабола и может быть гипербола.

Задача 6. Вокруг эллипса описан прямоугольник. Докажите, что длина диагонали этого прямоугольника не зависит от положения прямоугольника.

Точка z на координатной прямой называется *средним гармоническим* точек x и y, если $\frac{2}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ (предполагается, что начало координат фиксировано; при изменении начала координат среднее гармоническое изменяется).

Задача 7. Через фиксированную точку A проведём всевозможные прямые, и на каждой прямой, пересекающей фиксированную конику, отметим среднее гармоническое точек пересечения с коникой (точка A — начало координат). Докажите, что все отмеченные точки лежат на одной прямой.

Эта прямая называется *полярой* точки A относительно данной коники, а точка A называется *полюсом* этой прямой.

Задача 8. Из точки A проведены касательные AP и AQ к конике (P и Q — точки касания). Докажите, что PQ — поляра точки A.

Задача 9. Через точку A проведены две прямые. Одна из них пересекает конику в точках P_1 и P_2, а другая — в точках Q_1 и Q_2. Докажите, что точка пересечения прямых P_1Q_1 и P_2Q_2 лежит на поляре точки A. Указание: сначала рассмотрите случай, когда коника вырождается в пару прямых.

Задача 10. Докажите, что если поляра точки A проходит через точку B, то поляра точки B проходит через точку A.

Задача 11. С помощью одной линейки постройте касательные к данной конике, проходящие через данную точку.

Задача 12. Докажите, что поляра точки $(x_0 : y_0 : z_0)$ относительно коники $x^2+y^2+z^2=0$ задаётся уравнением $x_0x+y_0y+z_0z=0$. (Предполагается, что здесь рассматриваются точки не только с вещественными, но и с комплексными координатами.)