Геометрия: листок 3. Дробно-линейные преобразования комплексной плоскости (22 сентября 2014)

Дробно-линейное преобразование комплексной плоскости — это отображение вида $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, где числа a, b, c, d и z комплексные, $ad-bc \neq 0$. Чтобы дробно-линейные преобразования комплексной плоскости были определены всюду, их нужно рассматривать на комплексной плоскости, пополненной одной точкой ∞.

Задача 1. Докажите, что дробно-линейное преобразование комплексной плоскости переводит любую окружность или прямую в окружность или прямую.

Задача 2. Докажите, что дробно-линейное преобразование комплексной плоскости сохраняет углы между окружностями.

Задача 3. Докажите, что точки z_1, z_2, z_3 и z_4 лежат на одной окружности или на одной прямой тогда и только тогда, когда их двойное отношение $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ вещественно.

Задача 4. Числа a, b, c и d вещественные и $ad-bc > 0$. Докажите, что дробно-линейное отображение $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ отображает верхнюю полуплоскость (комплексные числа с положительными мнимыми частями) на себя.

Инверсия в пространстве относительно сферы S с центром O — это преобразование, при котором точка A (отличная от точки O) переходит в точку A^*, которая лежит на луче OA и $OA \cdot OA^* = R^2$, где R — радиус сферы S.

Задача 5. Докажите, что при инверсии (в пространстве) сфера или плоскость переходит в сферу или плоскость; прямая или окружность переходит в прямую или окружность.

Задача 6. Докажите, что инверсия (в пространстве) сохраняет углы между окружностями.

Задача 7. Докажите, что инверсия (в пространстве) сохраняет двойное отношение четырёх точек в пространстве, которое мы определяем как $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$.

Задача 8. Проведём через точку A, не лежащую на данной сфере S, все сферы, ортогональные сфере S. Докажите, что все они имеют ещё одну общую точку.

Пусть точка O — центр сферы S, плоскость α проходит через точку O, перпендикуляр к плоскости α, проходящий через точку O, пересекает сферу в точке N. *Стереографическая проекция* сферы S на плоскость α переводит точку A сферы (отличную от точки N) в точку пересечения прямой NA и плоскости α.

Задача 9. Докажите, что стереографическая проекция — это ограничение на сферу некоторой инверсии в пространстве.

Задача 10. Плоскость α, проходящая через центр сферы S, пересекает сферу по окружности. На хорде AB этой окружности взяты точки C и D и спроецированы на сферу S (ортогонально плоскости α). Докажите, что $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \left(\frac{C'A}{C'B} : \frac{D'A}{D'B}\right)^2$ (C' и D' — проекции точек C и D).

Задача 11. Докажите, что при стереографической проекции симметрия сферы S относительно плоскости (проходящей через центр) переходит в инверсию относительно некоторой окружности (или в симметрию относительно прямой). В частности, симметрия относительно плоскости α переходит в инверсию относительно окружности, по которой сфера S пересекает плоскость α.