Геометрия: листок 4. Классификация движений плоскости и пространства (29 сентября 2014)

Движение, сохраняющее ориентацию, называют *собственным*, а движение, изменяющее ориентацию, называют *несобственным.*

Задача 1. Докажите, что любое движение плоскости можно представить в виде композиции не более трёх симметрий относительно прямых.

Задача 2. а) Докажите, что собственное движение плоскости — это поворот или параллельный перенос.

б) Докажите, что несобственное движение плоскости — это скользящая симметрия, т.е. композиция симметрии и параллельного переноса вдоль оси симметрии.

Задача 3. Докажите, что любое движение пространства можно представить в виде композиции не более четырёх симметрий относительно плоскостей.

Задача 4. а) Докажите, что собственное движение пространства — это композиция поворота вокруг оси и параллельного переноса вдоль этой оси.

б) Докажите, что несобственное движение пространства — это композиция симметрии относительно плоскости α и либо параллельного переноса на вектор, параллельный α, либо поворота вокруг оси, перпендикулярной α.

Алгебра кватернионов $\mathbb{H}$ состоит из элементов вида $q = a + bi + cj + dk$ (a, b, c, $d \in \mathbb{R}$); умножение в этой алгебре задаётся соотношениями $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Кватернионы, для которых $a = 0$, образуют подпространство *чисто мнимых кватернионов.*

Рассмотрим два отображения алгебры кватернионов, заданные формулами $f_s(q) = -sqs^{-1}$ и $h_s(q) = sqs^{-1}$, $q, s \in \mathbb{H}$, $s \neq 0$.

Задача 5. Докажите, что если кватернион s чисто мнимый, то отображения f_s и h_s переводят пространство чисто мнимых кватернионов в себя и являются движениями этого пространства.

Задача 6. Докажите, что если кватернион s чисто мнимый, то отображение f_s — симметрия пространства чисто мнимых кватернионов относительно плоскости, перпендикулярной s, а отображение h_s — симметрия пространства чисто мнимых кватернионов относительно оси, содержащей s.

Задача 7. Докажите, что если $s = a + r$, где кватернион $r \neq 0$ чисто мнимый, то отображение h_s — поворот пространства чисто мнимых кватернионов вокруг оси, содержащей r.

Выпуклый многогранник в трёхмерном пространстве называется *правильным*, если все его грани — равные правильные многоугольники, а концы рёбер, выходящих из любой вершины, — вершины равных правильных многоугольников.

Символ Шлефли правильного многогранника с r_1-угольными гранями и r_2-гранными углами при вершинах — это упорядоченная пара $\{r_1, r_2\}$.

Задача 8. Докажите, что символ Шлефли правильного многогранника не может быть отличен от $\{3, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 3\}$, $\{3, 5\}$ и $\{5, 3\}$.

Задача 9. Докажите, что для каждого из символов Шлефли, перечисленных в задаче 8, существует правильный многогранник, и этот многогранник единствен с точностью до подобия.

Задача 10. Докажите, что выпуклый многогранник, вершины которого являются центрами граней правильного многогранника, тоже правильный. Он называется *двойственным* исходному правильному многограннику. Докажите, что многогранник, двойственный двойственному, совпадает с исходным (с точностью до подобия).

Задача 11. Найдите порядки группы всех самосовмещений и группы собственных самосовмещений для каждого из правильных многогранников.

Задача 12. Докажите, что правильными тетраэдрами с ребром 1 и октаэдрами с таким же ребром можно заполнить пространство.

Задача 13. Докажите, что если равны радиусы вписанных сфер двух двойственных друг другу правильных многогранников, то равны и радиусы их описанных сфер.