Геометрия: листок 6. Модели Клейна и Пуанкаре геометрии Лобачевского (13 октября 2014)

Задача 1. Докажите, что перпендикуляр (в смысле евклидовой геометрии) к диаметру модели Клейна является перпендикуляром в смысле геометрии Лобачевского.

Задача 2. Как (с помощью евклидовых циркуля и линейки) выполнить следующие построения в модели Клейна: а) построить середину данного отрезка; б) провести из данной точки перпендикуляр к данной прямой; в) построить биссектрису угла между данными двумя прямыми?

Углом параллельности для точки A и прямой l называют половину величины угла, образованного лучами с вершиной A, параллельными прямой l.

Задача 3. Пусть α — угол параллельности, a — расстояние от точки до прямой. Докажите, что $e^{-a} = \operatorname{tg}(\alpha/2)$.

Задача 4. Докажите, что в гиперболической геометрии сумма углов треугольника меньше π.

Задача 5. Докажите, что кратчайший отрезок, проведённый из точки к прямой, — перпендикуляр.

Задача 6. Докажите, что при движении точки по одной из двух параллельных прямых расстояние до другой прямой изменяется от 0 до ∞.

Величины углов треугольника ABC будем обозначать α, β и γ, а длины противолежащих им сторон будем обозначать a, b и c.

Задача 7. Докажите, что в треугольнике с прямым углом γ выполняются следующие соотношения: а) $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$; б) $\operatorname{th} a = \operatorname{sh} b \operatorname{tg} \alpha$.

Задача 8. С помощью задачи 7 докажите, что в треугольнике с прямым углом γ выполняются также следующие соотношения: $\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} c \sin \alpha$, $\operatorname{th} b = \operatorname{th} c \cos \alpha$, $\cos \alpha = \operatorname{ch} a \sin \beta$, $\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ch} c$.

Задача 9. Докажите, что $\dfrac{\operatorname{sh} a}{\sin \alpha} = \dfrac{\operatorname{sh} b}{\sin \beta} = \dfrac{\operatorname{sh} c}{\sin \gamma}$ (теорема синусов).

Задача 10. Докажите, что $\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos \alpha$ (первая теорема косинусов).

Задача 11. Докажите, что $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \operatorname{ch} a$ (вторая теорема косинусов).

Задача 12. Докажите, что если соответственные углы двух треугольников равны, то равны и сами треугольники.

Задача 13. Докажите, что площадь гиперболического треугольника равна $\pi - \alpha - \beta - \gamma$.

Задача 14. Докажите, что длина гиперболической окружности радиуса r равна $2\pi \operatorname{sh} r$.

Задача 15. Докажите, что площадь гиперболического круга радиуса r равна $4\pi \operatorname{sh}^2\left(\frac{r}{2}\right)$.

Задача 16. Три угла четырехугольника равны $\pi/2$, а четвертый угол равен γ. Найдите γ, если известны длины a и b сторон, соединяющих прямые углы.

Задача 17. Докажите, что все треугольники с вершинами на абсолюте равны.

Задача 18. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.