

# 1

**1.1.** Приведите три примера невырожденных систем двух линейных уравнений с целыми с двумя неизвестными, в которых и коэффициенты, и решения целы. Постройте графические решения этих систем на клетчатой бумаге.

**1.2.** Выведите формулы для решений систем трёх линейных уравнений с тремя неизвестными, аналогичные формулам для систем двух уравнений с двумя неизвестными. Что представляет собой условие невырожденности?

**1.3.** Перечислите свойства сложения и умножения, использовавшиеся при решении систем линейных уравнений.

**1.4\*.** Найдя  $a, b, c, d, e, f$ , при которых выполняется тождество

$$f(x) := \frac{1}{x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+1} + \frac{e}{x+2} + \frac{f}{x+3},$$

вычислите  $I := \int_{1/3}^{1/2} f(x)dx$  и разложите  $e^{240I}$  на простые множители.

**1.5\*.** Вычислите  $1^5 + 2^5 + \dots + 2015^5$ . **Указание.** Введите функции  $S_k(n) := 1^k + 2^k + \dots + n^k$  и докажите, что  $S_k$  – многочлен степени  $k+1$ . Вычислите  $S_0, S_1, S_2, \dots$  – сначала решив системы линейных уравнений, а затем сравнив  $S_k$  с производными  $S'_{k+1}$ .

**1.6.** Приведите несколько примеров редуцированных кубических уравнений с целыми коэффициентами и тремя разными *целыми* решениями. Находятся ли эти решения по формуле Кардано?

**1.7.** Приведите несколько примеров редуцированных кубических уравнений с целыми коэффициентами и единственным вещественным решением, которое к тому же *цело*. Находится ли это решение по формуле Кардано?

**1.8.** Найдите такой кубический многочлен  $f$ , что  $f(1) = 7868$ ,  $f(2) = 29891$ ,  $f(3) = 80076$  и  $f(4) = 170513$ .

**1.9.** Доказав, что при любом целом  $n$  функция  $x \mapsto \cos(nx)$  есть многочлен от  $\cos x$  (эти многочлены называются *многочленами Чебышёва*), вычислите  $\cos \frac{\pi}{16}$ ,  $\cos \frac{\pi}{9}$  и  $\cos \frac{\pi}{12}$ .

**1.10.** Перечислите свойства сложения и умножения, использовавшиеся при выводе формулы Кардано.

**1.11\*.** Постройте кубический многочлен с целыми коэффициентами, корни которого –  $\cos \frac{2\pi}{7}$ ,  $\cos \frac{4\pi}{7}$  и  $\cos \frac{6\pi}{7}$ .

**1.12\*\*.** Какие ещё числа вида  $\cos(r\pi)$ , где  $r$  – рациональное число, являются корнями квадратных или кубических многочленов с целыми коэффициентами?

**1.13\*.** Сведите задачу построения треугольника по трём биссектрисам к решению кубического уравнения. Приведите численные примеры.

17 сентября, Г.Б. Шабат