Независимый Московский Университет, Алгебра-1, осень 2015

2

(листок нестандартен: предлагается вместо пропущенной лекции)

Закрепление материала лекции 1

2.1. При каких λ система уравнений $\begin{cases} (\lambda^2 - 19\lambda + 126)x + 168y = 0 \\ 2x + (\lambda + 1)y = 0 \end{cases}$ имеет ненулевые решения?

2.2. Укажите все числа a, обладающие следующим свойством: каковы бы ни были числа b, b_1, b_2, найдётся такой квадратный трёхчлен f, что $f(a) = b$, $f(1) = b_1$ и $f(2) = b_2$. Обобщите полученный результат.

Дискриминанты кубических многочленов

2.3. При каких m и n многочлен $x^3 + mx + n$ имеет кратный корень?

2.4. Пусть $\{x_1, x_2, x_3\}$ – *разные* корни многочлена x^3+mx+n? Вычислите $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$. Можно ли в формулировке этой задачи опустить слово *разные*? Как изменить формулировку, чтобы она охватывала и многочлены с кратными корнями?

2.5. Выразите через коэффициенты кубического многочлена произведение значений производной многочлена в его корнях.

2.6. Выразите через коэффициенты кубического многочлена произведение значений многочлена в корнях его производной.

2.7*. Обобщите результаты задач **2.3 - 2.6** на случай многочленов произвольных степеней (начиная с квадратных трёхчленов).

Конгруэнтные числа и кубические кривые

2.8. Рациональное число называется *конгруэнтным*, если оно является площадью прямоугольного треугольника с рациональными сторонами. Докажите, что число конгруэнтно тогда и только тогда, когда оно является разностью трёхчленной арифметической прогрессии, состоящей из квадратов рациональных чисел. **Намёки.** Число 6 конгруэнтно: это – площадь "египетского" треугольника со сторонами 3,4,5. Свойство конгруэнтности выдерживает умножение на квадрат рационального числа. Число 24 – разность арифметической прогрессии 1, 25, 49, причём $1 = (4-3)^2, 25 = 5^2$ и $49 = (4+3)^2$.

2.9. Докажите, что, если число S конгруэнтно, то на кривой

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = x^3 - S^2 x\}$$

лежит *рациональная* точка $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, причём $y \neq 0$.

2.10. Пусть *кубическая* кривая задана в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ уравнением $y^2 = f(x)$, где f – кубический многочлен с рациональными коэффициентами без кратных корней. Докажите, что кривая *гладка*, и если на ней лежит рациональная точка, то касательная к кривой в этой точке либо *вертикальна*, либо пересекает кривую ещё в одной точке, которая тоже рациональна.

2.11*. Пользуясь известными вам *пифагоровыми* треугольниками, найдите по несколько рациональных точек на кривых вида $y^2 = x^3 - S^2 x$.

24 сентября, *Г.Б. Шабат*