

7

7.1*. Существует ли мономорфизм $\text{Free}_3 \rightarrow \text{Free}_2$? Существует ли эпиморфизм $\text{Free}_2 \rightarrow \text{Free}_3$?

7.2*. Существует ли мономорфизм

$$\langle a, b, c, d, e, f \mid [a, b][c, d][e, f] = 1 \rangle \rightarrow \langle a, b, c, d \mid [a, b][c, d] = 1 \rangle?$$

7.3. Определите структуру свободного произведения циклических групп $C_2 * C_2$. **Совет.** Реализуйте эту группу как множество слов в двубуквенном алфавите, в которых соседние буквы всегда различны. Рассмотрите подгруппу слов чётной длины; нормальна ли она?

7.4. Докажите, что группа S_3 порождается двумя элементами. Выпишите полную систему соотношений.

7.5. Перечислите все однородные пространства группы S_4 . В каких случаях стационарные группы нормальны?

7.6. Сколько существует k -элементных подмножеств n -элементного множества? Инъективных отображений k -элементного множества в n -элементное множество?

7.7. Определите тремя способами порядок группы вращений правильных многогранников в \mathbb{R}^3 , рассмотрев в каждом случае действия этих групп на множествах вершин, рёбер и граней.

7.8. Для каждой перестановки $\sigma \in S_n$, понимаемой как автоморфизм множества $\{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$, определим *готический знак*

$$\text{sgn}(\sigma) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$

Составьте таблицу готических знаков всех перестановок для $n = 3$. Сформулируйте предположение и проверьте его для $n = 4$.

7.9*. Докажите предположение задачи 7.8 для всех $n \in \mathbb{N}$.

7.10. Составьте таблицу *цикленных типов* перестановок из S_4 . Выделите перестановки из A_4 . Ваши наблюдения и предположения?

7.11. Докажите, что группа сохраняющих ориентацию гомотетий евклидовой плоскости изоморфна $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^\times$, где \mathbb{C}^\times действует на \mathbb{C} умножениями. Укажите геометрический смысл морфизма $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$.

7.12. Определим *проективную прямую* $\mathbb{P}_1(\mathbb{k}) := \mathbb{k} \amalg \{\infty\}$ над полем \mathbb{k} . На ней действует группа *дробно-линейных преобразований*

$$\text{PGL}_2(\mathbb{k}) := \left\{ x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{k}, ad \neq bc \right\},$$

где при $c \neq 0$ подразумевается $\frac{a(-\frac{d}{c})+b}{c(-\frac{d}{c})+d} = \infty$ и $\frac{a\infty+b}{c\infty+d} = \frac{a}{c}$, а при $c = 0$ принимается $\infty \mapsto \infty$. Докажите, что это действие 3-транзитивно.

5 ноября, Г.Б. Шабат