

9

9.1. Составьте таблицы умножения \mathbb{F}_8 и \mathbb{F}_9 .

9.2. Вычислите количество квадратных трёхчленов $\#\mathbb{F}_5[x]_2$. Сколько из них являются квадратами многочленов степени 1? Сколько из них неприводимы? Проверьте ваш ответ с помощью формулы корней квадратного уравнения.

9.3. Постройте теорию квадратных уравнений над полем характеристики 2. Учтите возможность несепарабельных расширений.

9.4. Сколько существует неприводимых многочленов в $\mathbb{F}_4[x]_3$?

9.5. Перечислите подполя поля $\frac{\mathbb{Q}[z]}{z^4+z^3+z^2+z+1}$.

9.6. Докажите, что расширение $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{7}) \supset \mathbb{Q}$ нормально.

9.7*. Докажите формулу Гаусса

$$\cos \frac{2\pi}{17} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

9.8*. Докажите, что формула, аналогичная формуле Гаусса из предыдущей задачи, существует для $\cos \frac{2\pi}{257}$.

9.9. Изоморфны ли поля $\mathbb{F}(\frac{\mathbb{R}[c,s]}{c^2+s^2-1})$ и $\mathbb{R}(t)$? **Совет.** Вспомните тригонометрию.

9.10. Докажите нормальность расширения

$$\mathbb{C}(z) \supset \mathbb{C}\left(\frac{(z^2 - z + 1)^3}{(z^2 - z)^2}\right).$$

Совет. Проанализируйте поведение рассматриваемой рациональной функции относительно замен $z \leftarrow \frac{1}{z}$ и $z \leftarrow 1 - z$.

9.11**. Пусть G – группа симметрий одного из *платоновых тел*, реализованная как группа дробно-линейных преобразований *сферы Римана*; рассмотрите соответствующее вложение $G \hookrightarrow \text{Aut}\mathbb{C}(z)$. Реализуйте все эти вложения явно. Докажите, что в каждом случае существует такая рациональная функция $\beta \in \mathbb{C}(z)$, что имеет место изоморфизм $\text{fix}(G) \simeq \mathbb{C}(\beta)$. Найдите все эти рациональные функции.

Совет. Найдите ответы в книге Ф. Клейна об икосаэдре.

9.12. Решите уравнение $x^2 = \frac{1}{z}$ в поле рядов Лорана $\mathbb{C}((z))$.

26 ноября, Г.Б. Шабат