

Листок 1. Кольца, модули, идеалы

Задача 1.1. В коммутативном кольце идеал прост тогда и только тогда, когда фактор по нему является областью целостности; идеал максимален тогда и только тогда, когда фактор по нему является полем.

Задача 1.2. а) Коммутативное кольцо является полем тогда и только тогда, когда в нем нет нетривиальных идеалов.

б) В кольце $\text{Mat}_n(k)$ матриц над полем нет нетривиальных двусторонних идеалов.

в*) Постройте биекцию между двусторонними идеалами колец R и $\text{Mat}_n(R)$.

Задача 1.3. Опишите все идеалы и соответствующие факторкольца для кольца $k[[x]]$ формальных степенных рядов.

Задача 1.4. Проверьте, что строго верхнетреугольные матрицы являются идеалом в кольце всех верхнетреугольных матриц, и найдите факторкольцо.

Задача 1.5. Постройте взаимно-однозначное соответствие между *циклическими* (порожденными одним элементом) модулями над кольцом и идеалами этого кольца.

Задача 1.6. Пусть M и N подмодули некоторого A -модуля. Докажите, что

а) $(M + N)/N \cong M/(M \cap N)$; б) $(M + N)/(M \cap N) \cong M/(M \cap N) \oplus N/(M \cap N)$.