Листок 2. Модули над кольцами главных идеалов

▷ Везде в этом листке кольцом главных идеалов называется кольцо, в котором все идеалы главные *и нет делителей нуля.*

Задача 2.1. Если идеалы I_1 и I_2 кольца A взаимно просты (в том смысле, что $I_1+I_2 = A$), то $A/I_1 \cap I_2 \cong A/I_1 \oplus A/I_2$. В частности, если A — кольцо главных идеалов, $(a_1, a_2) = 1$, то $A/(a_1a_2) \cong A/(a_1) \oplus A/(a_2)$.

Задача 2.2. На лекции было доказано, что подмодуль конечномерного свободного модуля над кольцом главных идеалов свободен. Докажите обратное утверждение: если любой подмодуль конечномерного свободного модуля над коммутативным кольцом A свободен, то A — кольцо главных идеалов.

Задача 2.3. Пусть $M = \mathbb{Z}^n$, $\varphi\colon M \to M$. Докажите, что группа $M/\operatorname{Im}\phi$ конечна тогда и только тогда, когда $\det\varphi \neq 0$, а порядок этой группы равен тогда $|\det\varphi|$.

Задача 2.4. Положим $d_A(n) = |\{x \in A | nx = 0\}|$.

а) Если для конечной абелевой группы A для всех натуральных n выполнено $d_A(n) \leqslant n$, то A — циклическая.

б) Любая конечная подгруппа мультипликативной группы поля циклична (в частности, мультипликативная группа конечного поля циклична).

Задача 2.5. а) Опишите все абелевы группы, у которых есть изоморфная $\mathbb{Z}/6$ подгруппа, фактор по которой тоже изоморфен $\mathbb{Z}/6$.

б) Опишите все абелевы группы, у которых есть изоморфная $\mathbb{Z}/4$ подгруппа, фактор по которой тоже изоморфен $\mathbb{Z}/4$.