

### Листок 3. Тензорное произведение модулей

▷ Все модули в этом листке — над коммутативными кольцами.

**Задача 3.1.** Найдите тензорные произведения абелевых групп

а)  $\mathbb{Z}/n \otimes \mathbb{Z}/m$ ; б)  $\mathbb{Q} \otimes (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ; в)  $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ .

**Задача 3.2.** а)  $A/I \otimes A/J = A/(I + J)$ .

б) Если  $a$  — идеал кольца  $A$ , то  $M \otimes_A (A/a) = M/aM$ .

**Задача 3.3.** а)  $B \otimes_A A[x] \cong B[x]$ ; б)  $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{C}$ .

**Задача 3.4.** Постройте естественный изоморфизм  $\text{Hom}(N \otimes M, L) \cong \text{Hom}(N, \text{Hom}(M, L))$  («тензорное умножение на модуль — левый сопряженный функтор к гомоморфизмам из модуля»).