Листок 4. Проективные модули и комплексы

Задача 4.1. Над кольцом главных идеалов все плоские (в т. ч. все проективные) конечнопорожденные модули являются свободными.

Задача 4.2. Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, E — (конечномерное) векторное расслоение на нем. Тогда $\Gamma(E)$ — проективный $C(X)$-модуль.

В действительности категория (конечномерных) векторных расслоений на X эквивалентна категории конечномерных проективных модулей над $C(X)$ ("теорема Свана").

Задача 4.3. Приведите пример плоского, но не проективного модуля; проективного, но не свободного модуля.

Задача 4.4. Если S — плоская R-алгебра, $a \subset R$ — идеал, то $a \otimes_R S = aS$.

Задача 4.5. Если в короткой точной последовательности комплексов два из комплексов точны, то точен и третий.

Задача 4.6 (5-лемма). Если в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc} X_1 & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & X_3 & \longrightarrow & X_4 & \longrightarrow & X_5 \\ \big\downarrow{\scriptstyle f_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_2} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_3} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_4} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_5} \\ Y_1 & \longrightarrow & Y_2 & \longrightarrow & Y_3 & \longrightarrow & Y_4 & \longrightarrow & Y_5 \end{array}$$

строки точны, а f_1, f_2, f_4, f_5 — изоморфизмы, то и f_3 изоморфизм.

Задача 4.7. Морфизмы комплексов $f, g \colon E \to F$ называются *гомотопными*, если существует такой морфизм $s \colon E \to F[1]$, что $f - g = ds + sd$.

а) Гомотопность — отношение эквивалентности.

б) Гомотопные морфизмы индукцируют одинаковые отображения на гомологиях.

Задача 4.8. а) Если P — проективная резольвента модуля M, а P' — проективная резольвента модуля M', то любой гомоморизм $M \to M'$ продолжается до гомоморфизма $P \to P'$...

б) ...причем любые два такие продолжения гомотопны.