Лекции по курсу «Гладкие, комплексные и симплектические действия тора».

А. А. Кустарев.

1. Выпуклая геометрия: конусы и веера

В курсе мы будем изучать связь свойств многообразий с действием тора и комбинаторных объектов выпуклой геометрии – многогранников и вееров. Вот одно из утверждений, к которому мы будем возвращаться на протяжении курса:

Теорема 1.1. *Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый n-мерный многогранник, заданный целочисленными неравенствами. P называется простым, если в каждой вершине сходятся ровно n гиперграней, и неособым, если нормали гиперграней в каждой вершине образуют базис решетки $\mathbb{Z}^n$. Тогда P определяет комплексное многообразие X_P со следующими свойствами:*

1. X_P компактно и имеет комплексную размерность n.

2. X_P обладает эффективным действием комплексного тора $(\mathbb{C}^*)^n$. Как следствие, X_P рационально.

3. Вложение грани $Q \subset P$ порождает эквивариантное (по действию комплексного тора) вложение комплексных многообразий $X_Q \subset X_P$.

4. Многообразие X_P является проективным; проективное вложение строится явно по многограннику P.

5. Орбиты действия $(\mathbb{C}^*)^n$ на X_P находятся во взаимно-однозначном соответствии с гранями P.

6. Многообразие X_P обладает клеточным разбиением, состоящим лишь из клеток четной размерности, причем число клеток размерности k равно k-й компоненте h-вектора многогранника P. Кольцо когомологий X_P однозначно определяется множеством нормалей к гиперграням и комбинаторикой граней многогранника P. Кольцо когомологий X_P порождено двумерными классами.

7. Полный класс Черна многообразия X_P равен $\prod_{i=1}^{m}(1+[F_i])$, где $F_i, i = 1\ldots m$ – гиперграни многогранника P, $[F_i]$ – класс подмногообразия $X_{F_i} \subset X_P$, имеющего комплексную коразмерность один.

Мы приведем в курсе все необходимые определения, участвующие в формулировке, начав с необходимых понятий выпуклой геометрии.

Определение 1.2. *Конусом в $\mathbb{R}^n$ называется множество точек, имеющее вид $\{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_j \geqslant 0, j = 1\ldots k\}$, где $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ – произвольные вектора, называемые образующими. Если все образующие лежат в стандартной решетке $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$, конус называется целочисленным.*

Определение 1.3. *Размерностью конуса называется размерность наименьшего линейного пространства, его содержащего (или, эквивалентно, ранг системы образующих векторов $v_1, \ldots, v_k$).*

Определение 1.4. *Конус называется строго выпуклым, если он не содержит нетривиальных линейных подпространств.*

Определение 1.5. *Конус называется симплициальным, если его размерность равна числу образующих векторов.*

Любой двумерный строго выпуклый конус является симплициальным, а вот для трехмерных конусов это уже не так (пример – конус при вершине октаэдра).

Определение 1.6. *Симплициальный целочисленный конус называется неособым, если его образующие могут быть дополнены до базиса решетки* $\mathbb{Z}^n$ *(эквивалентно, факторгруппа* $\mathbb{Z}^n/(\langle v_1, \ldots, v_k \rangle)$ *не имеет кручения).*

Пример 1.7. Положительный квадрант в $\mathbb{R}^2$ – неособый конус, а конус, порожденный векторами $e_1 - e_2$ и $e_1 + e_2$, неособым уже не является. Любой образ положительного октанта в $\mathbb{R}^n$ относительно линейного преобразования $g \in GL(n, \mathbb{Z})$ является неособым конусом. Верно и обратное утверждение: любой неособый конус размерности n в пространстве $\mathbb{R}^n$ является образом положительного октанта относительно некоторого преобразования $g \in GL(n, \mathbb{Z})$.

Пусть $C \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое подмножество, замкнутое относительно умножения на неотрицательные числа. Построим по множеству C полугрупповое кольцо $M_C \subset \mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]$. По определению, кольцо M_C порождено всеми мономами вида $z_1^{a_1}, \ldots, z_n^{a_n}$, для которых точка $(a_1, \ldots, a_n)$ лежит в $C \cap \mathbb{Z}^n$. По построению, множество таких мономов замкнуто по умножению.

Предложение 1.8. *Если* C *– целочисленный конус, то полугрупповое кольцо* M_C *конечно порождено.*

□ Рассмотрим подмножество $C_1 \subset C$ вида $C_1 = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant \lambda_j < 1, j = 1 \ldots k\}$. Оно ограничено, поэтому в нем лежит конечное число точек решетки $\mathbb{Z}^n$. Поскольку любая точка из $\mathbb{Z}^n \cap C$ может быть записана как линейная комбинация образующих $v_1, \ldots, v_k$ с неотрицательными коэффициентами, она получается из некоторой точки, лежащей в $C_1 \cap \mathbb{Z}^n$, прибавлением конечного числа целочисленных векторов $v_1, \ldots, v_k$. □

Задача 1.9. Покажите, что кольцо M_C, построенное по конусу $C = \left\langle e_1, e_1 + e_2\sqrt{2} \right\rangle$, не является конечно порожденным.

Предложение 1.10. *Пусть* C *– неособый конус размерности* k*. Тогда полугрупповое кольцо* M_C *изоморфно кольцу многочленов от* k *переменных.*

□ Достаточно проверить, что $C_1 \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$. Дополним систему $\{v_1, \ldots, v_k\}$ до базиса решетки $\mathbb{Z}^n$ векторами $w_{k+1}, \ldots, w_n$. Если $x \in C_1 \cap \mathbb{Z}^n$, то x раскладывается по целочисленному базису $v_1, \ldots, w_n$, но коэффициенты при w_j должны быть нулевые, а коэффициенты при v_i – целые, неотрицательные и меньше единицы, поэтому все они также равны нулю. □

Задача 1.11. Покажите, что для (особого) целочисленного конуса $C = \langle e_1 - e_2, e_1 + e_2 \rangle$ предыдущее предложение неверно.

Если неособый конус C имеет максимальную размерность n, то его полугрупповое кольцо изоморфно кольцу многочленов от n переменных. Стандартное кольцо многочленов $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n] \subset \mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]$ соответствует положительному октанту $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0} \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1.12. *Опорной плоскостью конуса* C *называется гиперплоскость, проходящая через начало координат, относительно которой конус* C *лежит целиком в некотором полупространстве. Гранью конуса* C *называется выпуклое множество, являющееся пересечением с некоторой опорной гиперплоскостью.*

Грань конуса является конусом (этот факт выглядит очевидно, но его строгое доказательство требует небольшой работы). Грань неособого конуса – неособый конус. Полугрупповое кольцо, соответствующее грани, канонически вложено в полугрупповое кольцо исходного конуса. Грань строго выпуклого конуса – строго выпуклый конус.

Определение 1.13. *Пусть X – выпуклое множество. Двойственным множеством X^* называется множество точек $x^* \in (\mathbb{R}^n)^*$ таких, что $(x^*, x) \geqslant 0$ для всех $x \in X$.*

Предложение 1.14. *Пусть C – выпуклый конус. Тогда верно следующее:*
1. Двойственный конус C^* является конусом.
2. $(C^*)^* = C$.
3. Если конус C имеет размерность k, то максимальная размерность линейного пространства, лежащего в C^*, равна $n - k$.
4. Если $D \subset C$ – грань конуса C, то $C^* \subset D^*$.

□ В общем случае доказательство всех четырех утверждений требует небольшого погружения в выпуклую геометрию. Но мы приведем лишь доказательства для случая, когда конус C неособ, так как для построения неособых торических многообразий важен именно этот случай. Если k-мерный конус C является неособым, то в некотором базисе решетки $\mathbb{Z}^n$ порождающими векторами для C являются базисные вектора $v_1 = e_1, \ldots, v_k = e_k$. Отсюда находим, что двойственный конус C^* является конусом, порожденным векторами $e_1^*, \ldots, e_k^*, \pm e_{k+1}^*, \ldots, \pm e_n^*$, откуда также видно, что $(C^*)^* = C$, а максимальное линейное подпространство, содержащееся в C^*, натянуто на базисные вектора $e_{k+1}^*, \ldots, e_n^*$.

Если $D \subset C$ – грань неособого конуса C, то D – также неособый конус. Факторгруппа решетки, порожденной образующими C по решетке, порожденной образующими D, не имеет кручения, поэтому можно выбрать согласованные базисы в этих решетках и объемлющей решетке $\mathbb{Z}^n$. Таким образом, можно считать, что D порождается векторами $e_1, \ldots, e_l$, где $l < k$ (считаем, что D – собственная грань). Тогда D^* порождается векторами $e_1^*, \ldots, e_l^*, \pm e_{l+1}^*, \ldots, \pm e_n^*$, откуда $C^* \subset D^*$. □

2. Неособые торические многообразия

В этом курсе мы будем изучать действия групп (конкретно – компактных и комплексных торов) на гладких и комплексных многообразиях.

Гладким многообразиям в этом семестре посвящен отдельный курс, а нам, чтобы двигаться дальше, потребуется определить их комплексный аналог. Определение комплексного многообразия принципиально ничем не отличается, но прежде чем его можно будет привести, необходимо определить голоморфные функции.

В стандартном вещественном линейном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ определен стандартный оператор комплексной структуры J_n, действующий умножением на матрицу, состоящую из блоков вида $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Оператор J_n соответствует умножению на «мнимую единицу», записанному в вещественном базисе.

Пусть $A\colon \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2n}$ – линейное отображение. Оно является комплексно-линейным (происходит из линейного отображения $A\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$), если и только если $J_n A = A J_m$. Прямая проверка показывает, что на матричном языке это условие означает, что матрица A составлена из $n \times m$ блоков вида $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$.

Определение 2.1. *Дифференцируемое отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^{2n}$, где $U \subset \mathbb{R}^{2m}$ – открытое подмножество, называется голоморфным, если его дифференциал всюду является комплексно-линейным.*

Если функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ является дифференцируемой и ее дифференциал всюду комплексно-линеен, то соответствующие уравнения на частные производные вещественных и мнимых частей называются уравнениями Коши-Римана. Оказывается, в этом случае у функции f существуют производные всех порядков (а не только первая) и, кроме того, ряд Тейлора функции f в любой точке сходится к ней самой. Аналогичные утверждения верны для дифференцируемой функции $f\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^2$ от нескольких переменных, имеющей комплексно-линейный дифференциал.

Если $f\colon U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ – произвольная гладкая (не голоморфная) функция, то обозначения $z_j = x_j + iy_j, \bar{z}_j = x_j - iy_j$ позволяют переписать функцию f как функцию от $2n$ переменных $z_j, \bar{z}_j$. Операторы дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_j}$ и $\frac{\partial}{\partial y_j}$ являются линейными операторами в пространстве комплексно-значных бесконечно гладких функций.

Обратно, предположим, что гладкая функция f на $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$ задана как функция от переменных $z_j, \bar{z}_j$; найдем ее производные по исходным переменным x_j, y_j. Имеем $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ и $\frac{\partial f}{\partial y_j} = i\frac{\partial}{\partial z_j} - i\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$. Эта выкладка подсказывает, что мы можем ввести формальные дифференциальные операторы на пространстве комплекснозначных гладких функций: $\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j})$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j})$.

Из определения непосредственно следует, что $\frac{\partial z_k}{\partial \bar{z}_j} = 0$ для всех j, k.

Предложение 2.2. *Условие голоморфности функции $f\colon U \to \mathbb{C}$ равносильно условию $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0$, $j = 1 \dots n$.*

$\square$ Оба условия означают, что $(2n \times 2)$–матрица дифференциала функции f в стандартном базисе состоит из блоков вида $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$. $\square$

Любая полиномиальная функция $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ от переменных $z_1, \dots, z_n$ голоморфна, поскольку функции, голоморфные в данной области, образуют кольцо (проверьте это), а координатные функции $z_1, \dots, z_n$ голоморфны. Функция, локально представимая в виде отношения двух голоморфных, называется мероморфной; мероморфные функции голоморфны на своей области определения.

Определение 2.3. *Комплексным многообразием называется гладкое четномерное многообразие, снабженное атласом, в котором все функции перехода голоморфны.*

Пример 2.4. (проективное пространство). Рассмотрим множество $\mathbb{C}P^n$ комплексных прямых в $\mathbb{C}^{n+1}$, проходящих через начало координат. Это не то же самое, что множество проходящих через ноль двумерных плоскостей в $\mathbb{R}^{2n+2}$ (нужно еще потребовать, чтобы эти плоскости были инвариантны относительно оператора комплексной структуры J_{n+1}).

Пространство $\mathbb{C}P^n$ метризуемо: метрика между двумя комплексными прямыми задается как минимальное расстояние между окружностями единичных векторов на этих прямых. Как метрическое пространство, $\mathbb{C}P^n$ хаусдорфово.

Пространство $\mathbb{C}P^n$ можно отождествить с топологическим пространством, состоящим из наборов комплексных чисел вида $[z_0 : \ldots : z_n]$, где все числа z_j одновременно не равны нулю, и $[z_0 : \ldots : z_n] \sim [z'_0 : \ldots : z'_n]$, если и только если эти наборы отличаются умножением на ненулевое комплексное число. Таким образом, топология на $\mathbb{C}P^n$ может быть введена как фактортопология пространства $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ по диагональному действию группы $\mathbb{C}^*$.

Покажем, что $\mathbb{C}P^n$ является комплексным многообразием. Определим карту $U_i \subset \mathbb{C}P^n$, $i = 0 \dots n$, как множество точек $[z_0 : \ldots : z_n]$, для которых $z_i \neq 0$. Тогда $U_i \subset \mathbb{C}P^n$ гомеоморфно $\mathbb{C}^n$, гомеоморфизм задается формулой $x_k = \frac{z_k}{z_i}$.

Найдем функцию перехода от U_i к U_j. Если, к примеру, $i = 0$ и $j = 1$, то для описания функции перехода достаточно записать условие того, что точки $[1 : x_1 : x_2 : \ldots : x_n]$ и $[x'_0 : 1 : x'_2 : \ldots : x'_n]$ отличаются умножением на ненулевую константу. Таким образом, $x'_k = x_k {x_j}^{-1}$ при $k \neq i$ и $x'_i = {x_j}^{-1}$. Все эти функции голоморфны на своей области определения.

Аналогично вводятся общие определения комплексного подмногообразия и голоморфного действия группы. Перейдем к построению торических многообразий.

Определение 2.5. *Множество строго выпуклых конусов F в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется веером, если любая грань любого конуса из F также лежит в F, пересечение любых двух* *конусов из F является гранью каждого из них, и каждый конус является гранью некоторого конуса размерности n.*

Определение 2.6. *Веер F называется неособым, если все конусы, входящие в него, неособы.*

Веер называется полным, если объединение всех конусов – это все пространство $\mathbb{R}^n$.

Задача 2.7. Полный симплициальный веер порождает триангуляцию сферы S^{n-1}.

Мы построим по неособому вееру комплексное многообразие с эффективным действием комплексного тора максимальной размерности; это многообразие будет компактным, если и только если исходный веер был полным.

Построим по неособому вееру F комплексное многообразие X_F.

(1) Каждому конусу C_i максимальной размерности сопоставим карту $U_i \simeq \mathbb{C}^n$ с координатами $(x_1^i, \dots, x_n^i)$.
(2) Полугрупповое кольцо $M_{C_i^*} \subset \mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$, порожденное неособым конусом C_i^* с n образующими $(v_1^i, \dots, v_n^i)$, изоморфно кольцу многочленов от n переменных. Вектора $v_1^i, \dots, v_n^i$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^{n*}$.
(3) Для любых двух карт U_i, U_j определена матрица перехода A_{ij}, выражающая базис v_l^j через базис v_k^i:
$$\begin{pmatrix} v_1^j \\ \dots \\ v_n^j \end{pmatrix} = A_{ij} \begin{pmatrix} v_1^i \\ \dots \\ v_n^i \end{pmatrix}$$
Мономиальные функции, построенные по строкам матрицы A_{ij}, примем за функции перехода между картами U_i и U_j. Имеем $A_{ik} = A_{jk}A_{ij}$.
(4) Склеим между собой все карты U_i по функциям перехода.

Склейка является симметричной и транзитивной. Это очевидно, если все координаты склеиваемых точек отличны от нуля; в общем случае мы покажем это чуть позже.

Теорема 2.8. *Пространство X_F является комплексным многообразием, а образы множеств $U_i \subset X_F$ – картами голоморфного атласа.*

Определение 2.9. *Многообразие X_F называется торическим многообразием, построенным по вееру F.*

Пример 2.10. Пространство $\mathbb{C}^n$ является простейшим торическим многообразием, построенным по вееру, содержащему лишь положительный октант и все его грани.

Пример 2.11. Пусть $n = 1$. Рассмотрим веер P_1, порожденный векторами $(1, 0)$ и $(-1, 0)$. Ему соответствуют отображения $f_0(z) = x$ и $f_1(z) = y^{-1}$. Функция перехода, таким образом, записывается в виде $f_1 f_0^{-1}(x) = y^{-1}$, что совпадает с функцией перехода комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P^1$. Таким образом, $X_{P_1} = \mathbb{C}P^1$.

Пример 2.12. Для произвольного n рассмотрим базисные вектора $e_1, \dots e_n$ и добавим к ним вектор $e_{n+1} = -e_1 - \dots - e_n$. Тогда любое n-элементное подмножество из этих $(n+1)$ векторов порождает неособый конус максимальной размерности в $(n+1)$, причем объединением всех этих конусов является все пространство $\mathbb{R}^n$. Обозначим через P_n веер, порожденный этими $(n+1)$ конусами. Тогда функции перехода торического многообразия X_{P_n} совпадают с функциями перехода стандартного атласа комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^n$.

Например, для $\mathbb{C}P^2$ имеем $v_1^0 = e_1^*$, $v_2^0 = e_2^*$, $v_1^1 = -e_1^*$, $v_2^1 = e_2^* - e_1^*$, $v_1^2 = -e_2^*$, $v_2^2 = e_1^* - e_2^*$. Тогда $A_{01} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $A_{02} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $A_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ и $A_{12}A_{01} = A_{02}$, как и должно быть.

3. Отделимость и действие комплексного тора

Докажем теорему 2.8: топологическое пространство X_F действительно является комплексным многообразием. Установим сперва, как выглядит склейка двух произвольных карт U_i и U_j.

Лемма 3.1. *Пусть U_i и U_j – две карты, соответствующие конусам C_i и C_j максимальной размерности. Тогда $U_i \cap U_j \simeq \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^{n-k}$, где $k = \dim C_i \cap C_j$.*

□ Пересечение $C_i \cap C_j$ также является неособым конусом. Поэтому мы можем выбрать целочисленные образующие $e_1, \ldots, e_n$ для неособого конуса C_i и $f_1, \ldots, f_n$ для неособого конуса C_j так, что $e_1 = f_1, \ldots, e_k = f_k$.

Пусть $A = A_{ij}$ – матрица перехода от сопряженного базиса e_l^* к f_m^*. Как указано в конструкции многообразия X_F, строки матрицы A задают выражение координатных функций карты U_j в виде мономиальных функций от координат карты U_i. Таким образом, достаточно выяснить, для каких векторов e_l^* в l-м столбце матрицы A есть хотя бы один отрицательный коэффициент. Покажем, что это верно, если и только если $l > k$.

Имеем $f_m^* = a_{m1}e_1^* + \ldots + a_{mn}e_n^*$. Тогда $a_{ml} = \delta_l^m$ при $l \leqslant k$, поскольку $\delta_l^m = f_m^*(f_l) = f_m^*(e_l) = a_{ml}$. В частности, в первых l столбцах матрицы A нет ни одного отрицательного коэффициента.

Предположим теперь, что $a_{m,k+1} \geqslant 0$ для всех m. Тогда $f_m^*(e_l) \geqslant 0$ для всех $m = 1, \ldots, n$ и $l = 1, \ldots, k+1$. Поскольку $((C_2)^*)^* = C_2$, вектора $e_1, \ldots, e_{k+1}$ лежат в пересечении $C_1 \cap C_2$, которое, тем самым, имеет размерность, большую k, что неверно. □

Следствие 3.2. *Отношение склейки, описанное в определении торического многообразия, является симметричным.*

□ Пусть $z_i \in U_i$ и $z_j \in U_j$ – две точки, причем z_i склеивается с z_j. Если все координаты точки z_i отличны от нуля, то склейка, очевидно, симметрична. Если же это не так, то, в обозначениях леммы 3.1, множества индексов нулевых координат точек z_i и z_j совпадают, а из общего вида матрицы перехода, полученного в лемме 3.1, следует, что z_j также склеивается с z_i. □

Лемма 3.3. *Отношение склейки, описанное в определении торического многообразия, является транзитивным.*

□ Если $z_i, z_j, z_k \in U_i, U_j, U_k$, причем z_i склеивается с z_j в $U_i \cap U_j$, а z_j склеивается с z_k в $U_j \cap U_k$, то нужно показать, что z_i склеивается с z_k в $U_i \cap U_k$. В обозначениях леммы 3.1 получаем, что последние $(n-k)$ координат точек z_i и z_j отличны от нуля, что дает ограничения и на координаты точки z_k. Следовательно, $z_i, z_k \in U_i \cap U_k$. Остается применить равенство $A_{ik} = A_{jk}A_{ij}$. □

Следствие 3.4. *Для любой карты U_i отображение $U_i \to X_F$ является вложением.*

Следовательно, открытые множества U_i являются картами, а в силу леммы 3.1 функции перехода голоморфны на пересечении. Осталось проверить хаусдорфовость пространства X_F.

Лемма 3.5. *Пусть C_1 и C_2 – два неособых конуса размерности n, пересекающиеся по конусу C_{12}, являющемуся гранью каждого из них. Тогда существует гиперплоскость L, делящая пространство $\mathbb{R}^n$ на два полупространства L_+ и L_- таких, что*

1. $C_1 \subset L_+$.
2. $C_2 \subset L_-$.
3. $C_1 \cap L = C_2 \cap L = C_{12}$.

□ Применим стандартную теорему об отделимости выпуклых множеств: два выпуклых непересекающихся замкнутых множества могут быть разделены гиперплоскостью, не пересекающейся ни с одним из множеств. Приведем доказательство, когда $C_{12} = O$; общий случай аналогичен.

Рассмотрим конус C_1 и замкнутое множество C_2', полученное из конуса C_2 отрезанием маленького симплекса у вершины. Тогда C_1 и C_2' разделяются гиперплоскостью L. Поскольку начало координат O и множество C_2' лежат в разных полупространствах, гиперплоскость L пересекает все стороны отрезанного симплекса, содержащие O. Сдвинем гиперплоскость L параллельно в начало координат. Тогда $L \cap C_2 = O$, а $L \cap C_1$ является гранью, натянутой на лучи, содержащиеся в L (таких лучей не более $(n-1)$). Повторим конструкцию, построив по множествам C_1' и C_2 гиперплоскость L', проходящую через начало координат. Гиперплоскость L'', соответствующая сумме уравнений, задающих L и L', является искомой. □

Перейдем к доказательству хаусдорфовости. Пусть $z, z' \in X_F$ – две произвольные точки. Если существует карта U_i, в которой лежат и z, и z', то в этом случае точки, очевидно, разделяются парой открытых непересекающихся множеств. Пусть теперь $z \in U_i$, $z' \in U_j$ и $z, z' \notin U_i \cap U_j$. Мы знаем, как устроено множество $U_i \setminus U_j$ в силу леммы 3.1: можно считать, что это объединение гиперплоскостей $P = \{z_{k+1} = 0\} \cup \ldots \cup \{z_n = 0\}$, где $k = \dim C_i \cap C_j$.

Пусть $w_l \to z, l \in \mathbb{N}, w_l \in U_i \setminus P, z \in P$. Из этого следует, что хотя бы одна из координат точек w_l, лежащая в $[k+1, n]$, стремится к нулю. Покажем, что $w_l \to \infty$ в карте C_j: для этого предъявим голоморфный моном в координатах карты C_j, стремящийся к бесконечности на последовательности w_l.

В силу предыдущей леммы, существует ковектор v^*, который принимает значения, меньшие нуля на векторах $e_{k+1}, \ldots, e_n$, большие нуля на векторах $f_{k+1}, \ldots, f_n$ и равные нулю на векторах $e_1 = f_1, \ldots, e_k = f_k$. Пошевелив соответствующую гиперплоскость, ковектор v^* можно считать целочисленным. Тогда соответствующая ковектору мономиальная функция стремится к бесконечности на последовательности w_l в карте U_j, но при этом является полиномом от координат этой карты. □

Из определения торического многообразия следует, что на нем есть эффективное действие тора $(\mathbb{C}^*)^n$. Определим на какой-либо карте действие тора как тривиальное покоординатное. В других картах это действие доопределяется с помощью функций перехода (разберем $\mathbb{C}P^2$ в качестве примера).

Начало координат в каждой карте является неподвижной точкой действия (отметим, что начало координат каждой карты не лежит ни в какой другой карте). Поскольку каждая точка многообразия X_F лежит в какой-то карте, неподвижные точки действия взаимно-однозначно соответствуют множеству n-мерных конусов.

Лемма 3.6. *Орбиты действия тора, имеющие коразмерность k, находятся во взаимно-однозначном соответствии с конусами размерности k.*

□ Любая орбита коразмерности k соответствует координатной плоскости коразмерности k в некотором пространстве, которые, в свою очередь, соответствуют граням конусов максимальной размерности. □

Отметим, что действие тора $(\mathbb{C}^*)^n$ на X_F определяется не канонически, а лишь с точностью до автоморфизма, порождаемого произвольным элементом группы $GL(n, \mathbb{Z})$.

4. Полнота веера и компактность. Момент-угол многообразия.

Сформулируем критерий компактности торического многообразия X_F в терминах веера F.

Определение 4.1. *Веер называется полным, если объединение всех его конусов – это все пространство $\mathbb{R}^n$.*

Теорема 4.2. *Торическое многообразие X_F компактно, если и только если веер F является полным.*

Пусть $b \in \mathbb{Z}^n$ – некоторая точка стандартной решетки, а C – некоторый конус максимальной размерности неособого веера F. Пусть $b_1, \dots, b_n$ – коэффициенты разложения вектора b по базису образующих конуса C. Сопоставим точке b однопараметрическую подгруппу $P_b = \{t \mapsto (t^{b_1}, \dots, t^{b_n})\} \subset (\mathbb{C}^*)^n$. Предполагается, что пространство $(\mathbb{C}^*)^n \subset U$ снабжено координатами карты $U \simeq \mathbb{C}^n$, соответствующей конусу C.

Как было показано выше, точки из указанного пространства $(\mathbb{C}^*)^n \subset U$ принадлежат пересечению $U \cap U'$ карты U с любой другой картой U'.

Лемма 4.3. *Подгруппа P_b не зависит от выбора изначальной карты U. Другими словами, если повторить конструкцию, начав с другой карты U', получится то же множество точек в подпространстве карты U', образованном точками с ненулевыми координатами.*

□ Лемма доказывается непосредственной проверкой через функции перехода. В карте U вектор b, раскладывающийся по образующим соответствующего конуса C с коэффициентами $(b_1, \dots, b_n)$, задает однопараметрическую подгруппу $t \mapsto (t^{b_1}, \dots, t^{b_n})$. Обозначим через $e_i, i = 1 \dots n$, образующие конуса C, соответствующего карте U, а через $f_i, i = 1 \dots n$, – образующие конуса C', соответствующего карте U'. Тогда $f_i^* = a_{ij} e_j^*$ и $e_j = a_{ij} f_i$. Следовательно, $b = \sum_j b_j e_j = \sum_j b_j a_{ij} f_i$. С другой стороны, при переходе от координат z_i карты U к координатам w_i карты U' имеем $w_i = z_1^{a_{i1}} \dots z_n^{a_{in}}$. Таким образом, i-я компонента образа точки t в однопараметрической подгруппе в новых координатах имеет вид $(\dots, t^{\sum_j a_{ij} b_j}, \dots)$, что и требовалось. □

Таким образом, имеет место сопоставление (точки решетки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ – однопараметрические подгруппы в $(\mathbb{C}^*)^n$) и (точки решетки $(\mathbb{Z}^n)^* \subset (\mathbb{R}^n)^*$ – характеры или мономиальные функции на $(\mathbb{C}^*)^n$).

□ Приступим теперь к доказательству леммы о компактности торического многообразия. Предположим, что неособый веер F не является полным. Тогда существует точка $b \in \mathbb{Z}^n$, не лежащая ни в одном конусе максимальной размерности. В каждой локальной карте хотя бы одна из координатных функций стремится к бесконечности при $t \to \infty$, если ее ограничить на однопараметрическую подгруппу P_b. Значит, многообразие X_F в этом случае некомпактно.

Предположим, теперь, что многообразие X_F некомпактно и существует последовательность точек u_k, не имеющая предельной. Поскольку множество $(\mathbb{C}^*)^n \subset X_F$ плотно, можно считать, что все элементы последовательности лежат в $(\mathbb{C}^*)^n$. Далее, поскольку однопараметрические подгруппы, в свою очередь, плотны в $(\mathbb{C}^*)^n$, можно считать, что каждый из элементов последовательности u_k лежит на некоторой однопараметрической.

Как подмножество точек $(\mathbb{C}^*)^n$, однопараметрическая подгруппа определяется целочисленным вектором с точностью до умножения на ненулевое целое число. Мы будем считать, что вектор, определяющий однопараметрическую, содержащую данную точку u_k, является примитивным. Знак этого вектора определим из условия, что точка u_k является образом точки $u \in \mathbb{C}^*$, лежащей в единичном круге (если $u \in S^1$, то выберем знак произвольно).

Множество конусов веера F конечно, и поскольку веер полный, в некотором n-мерном конусе C_i лежит бесконечное число целочисленных векторов, определяющих однопараметрические подгруппы, содержащие точки u_k. Каждый из этих векторов раскладывается по базису образующих конуса C_i с неотрицательными коэффициентами. Выкинем все точки последовательности u_k, не соответствующие этим векторам, из последовательности. В силу определения знака, приведенного выше, все оставшиеся точки будут лежать в единичном шаре карты U_i, а следовательно, в этой карте у последовательности u_k есть предельная точка. □

Наш следующий пункт – построение клеточного разбиения для торических многообразий. Любое торическое многообразие допускает клеточное разбиение, состоящее из клеток только четной размерности. Но докажем мы это лишь для более узкого класса *торических многообразий, происходящих из простых многогранников.*

Пусть P – n-мерный *простой* выпуклый многогранник, т.е. каждая вершина P является пересечением ровно n гиперграней F_i, а общее число гиперграней равно $m = m(P)$. Предполагается, что многогранник P вложен в стандартное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ при помощи уравнений

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle \bar{a}_i, x\rangle + b_i \geqslant 0\},\ i = 1 \dots m.$$

Мы можем эквивалентно записать вложение в матричном виде

$$A_P x + b_P \geqslant 0,$$

где A_P – матрица размера $(m \times n)$ и b_P – m-мерный вектор. Матрица A_P имеет максимальный ранг, так как ее столбцы – нормальные вектора к гиперграням P, а эти вектора линейно независимы в любой вершине многогранника P.

Рассмотрим порожденное A_P и b_P аффинное отображение $i_P \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$i_P(x) = A_P x + b_P.$$

Если $\mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$ – положительный октант евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ (т.е. область точек, все координаты которых неотрицательны), то $i_P(P) = i_P(\mathbb{R}^n) \cap \mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$.

Рассмотрим комплексное линейное пространство $\mathbb{C}^m$ со стандартным действием компактного тора T^m и отображение проекции на пространство орбит действия тора $\rho \colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$, заданное формулой $\rho(z_1, \dots, z_m) = (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2)$. Отображение ρ – собственное, поэтому полный прообраз $\mathcal{Z}_P = \rho^{-1}(i_P(P))$ – компактное подмножество в $\mathbb{C}^m$. Поскольку матрица A_P имеет максимальный ранг, определена проекция $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$, ядром которой является образ A_P. Выбрав базис в $\mathbb{R}^{m-n}$, мы задаем эту проекцию $(m-n) \times m$-матрицей $C_P = (c_{j,k})$, аннулирующей A_P и также имеющей максимальный ранг.

Теорема 4.4. *Множество $\mathcal{Z}_P = \rho^{-1}(i_P(P))$ является вещественно-алгебраическим подмногообразием размерности $(m + n)$ в $\mathbb{C}^m$. В терминах матрицы C_P оно задается как полное пересечение гиперповерхностей, задаваемых $(m - n)$ квадратичными уравнениями*

$$\sum_{k=1}^{m} c_{j,k}(|z_k|^2 - b_k) = 0,\ j = 1 \dots (m - n).$$

□ Нужно явно проверить, что градиенты $(m - n)$ квадратичных уравнений линейно независимы. Пусть $z = (z_1, \dots, z_m) = (x_1, \dots, y_m) \in Z_P$ – некоторая точка. Множество $\mathcal{Z}_P$ задается $(m - n)$ уравнениями, приведенными выше. Градиент j-го уравнения после умножения на $\frac{1}{2}$ имеет вид $(c_{j,1}x_1, c_{j,1}y_1, \dots, c_{j,m}x_m, c_{j,m}y_m)$. Без ограничения общности мы можем считать, что точка $\rho(z)$ лежит во внутренности некоторой грани $F \subset P$, образованной пересечением первых k гиперграней, и что пересечение первых n гиперграней многогранника P является вершиной (которая, тем самым, лежит в F). Доказательство завершается следующим утверждением. □

Лемма 4.5. *В предположениях, сделанных выше, квадратная матрица, образованная последними $(m - n)$ столбцами матрицы C_P, невырожденна.*

□ Это утверждение не зависит от выбора систем координат в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{m-n}$. Выберем в качестве базиса в пространстве $\mathbb{R}^n$ нормали к первым n гиперплоскостям. Тогда $A_P = (E|X)^T$, где E – единичная $(n \times n)$-матрица, а X – некоторая матрица размера $(m-n) \times n$. Мы можем тогда положить $C_P = (-X^T|E)$, где E – единичная $(m - n) \times (m - n)$-матрица. □

Отметим, что все гиперповерхности в теореме 4.4 инвариантны относительно действия компактного тора T^m на $\mathbb{C}^m$ и, тем самым, многообразие $\mathcal{Z}_P$ обладает каноническим действием тора T^m. Многообразие $\mathcal{Z}_P$ называется *момент-угол многообразием*, соответствующим многограннику P. Каноническую проекцию $\mathcal{Z}_P \to P$ обозначим через ρ.

Таким образом, $\mathcal{Z}_P$ – $(m+n)$-мерное вещественно-алгебраическое многообразие с каноническим левым действием группы T^m.

Матрица A_P определяет симплициальный нормальный веер F_P многогранника P. По определению, одномерные конуса соответствуют нормалями к гиперграням, а если k гиперграней имеют непустое пересечение, то на соответствующие им одномерные конуса натягивается k-мерный симплициальный конус.

Лемма 4.6. *Нормальный веер, построенный по простому многограннику, является полным.*

$\square$ Лемма следует из альтернативного определения веера, соответствующего простому многограннику. Множество векторов, для которых существует нормальная им гиперплоскость, являющаяся опорной для данной грани $F \subset P$, является симплициальным конусом. Поскольку для каждого вектора найдется нормальная ему гиперплоскость, являющаяся опорной к некоторой грани многогранника, соответствующий веер является полным. $\square$

Предположим теперь, что нормальный веер, заданный матрицей A_P, неособ (в частности, матрица A_P является целочисленной). Тогда можно построить торическое многообразие X_P, которое будет компактным (соответствующий веер является полным, но мы не будем это доказывать). Мы приведем другую конструкцию гладкого многообразия X_P – факторизацию гладкого многообразия $\mathcal{Z}_P$ по действию компактного тора.

Рассмотрим точную последовательность групп $1 \to \ker l \to T^m \xrightarrow{l} T^n \to 1$, где вторая стрелка $l\colon T^m \to T^n$ задана матрицей A_P. Тогда отображение l – эпиморфизм, так как определитель любой квадратной подматрицы, соответствующей вершине многогранника (например, образованной пересечением первых n гиперграней), равен ± 1.

Введем обозначение $K = \ker l$.

Лемма 4.7. *Подгруппа $K \subset T^m$ действует на $\mathcal{Z}_P$ свободно.*

$\square$ Проверим, что K тривиально пересекается со стабилизатором любой точки $z \in \mathcal{Z}_P$. Пусть точка $\rho(z)$ лежит во внутренности некоторой грани F, являющейся пересечением первых k гиперграней. Как и прежде, без ограничения общности можем считать, что первые n гиперграней многогранника P пересекаются по вершине. Тогда сквозное вложение $T^n_{\{1,\ldots,n\}} \to T^m \xrightarrow{l}$, где тор $T^n_{\{1,\ldots,n\}} \subset T^m$ соответствует первым n гиперграням многогранника P, является изоморфизмом. Следовательно, $K \cap T^n_{\{1,\ldots,n\}} = 1$. Поскольку стабилизатор точки $\rho(z)$ – это координатный тор $T^k_{\{1,\ldots,k\}}$, имеем также $K \cap T^k_{\{1,\ldots,k\}} = 1$. $\square$

Определение 4.8. *Гладкое многообразие $X_P = \mathcal{Z}_P/K$ называется торическим многообразием, соответствующим многограннику P. Оно совпадает с многообразием, построенным по нормальному вееру многогранника P.*

Замечание 4.9. Не любой неособый веер является нормальным веером некоторого многогранника. Попробуйте привести пример трехмерного веера, для которого это не так.

5. Факторизация по действию компактного тора. Функции Морса.

Лемма 5.1. *В обозначениях предыдущей лекции имеет место изоморфизм $K \cong T^{m-n}$.*

$\square$ Подгруппа K замкнута как подмножество топологической группы T^m, поскольку гомоморфизм $l\colon T^m \to T^n$ непрерывен. Замкнутая подгруппа компактной абелевой группы Ли T^m сама является компактной абелевой группой Ли. В свою очередь, любая компактная абелева группа Ли изоморфна произведению конечной группы и компактного тора.

Точная последовательность $1 \to K \to T^m \xrightarrow{l} T^n \to 1$ расщепляется, поскольку существует сечение $T^n \to T^m$. Следовательно, $T^m \cong K \times T^n$, откуда получаем, что группа K связна и имеет размерность $m-n$, то есть $K \simeq T^{m-n}$. $\square$

Следовательно, пространство X_P, построенное как фактор свободного действия компактной группы Ли $K \cong T^{m-n}$ на компактном гладком многообразии $\mathcal{Z}_P$, само является компактным гладким многообразием.

Поскольку точная последовательность $1 \to K \to T^m \xrightarrow{l} T^n \to 1$ расщепляется, факторгруппа T^m/K изоморфна компактному n-мерному тору T^n, который, тем самым, действует на гладком многообразии X_P. Пространство орбит действия T^n на X_P совпадает с пространством орбит действия тора T^m на $\mathcal{Z}_P$ – то есть с многогранником P. Действие тора T^n на X_P эффективно. Обозначим через $\pi\colon X_P \to P$ проекцию на соответствующее пространство орбит.

Лемма 5.2. *Отображение π порождает биекцию между множеством неподвижных точек действия тора T^n на X_P и множеством вершин многогранника P.*

□ Неподвижные точки действия T^n на X_P при переходе к прообразу – момент-угол многообразию $\mathcal{Z}_P$ – превращаются в точки, у которых стабилизатор имеет размерность n, а значит, в точности n координат в пространстве $\mathbb{C}^n$ равны нулю. Эти точки соответствуют пересечениям n гиперграней многогранника P, то есть вершинам. □

Лемма 5.3. *Многообразие X_P обладает канонической T^n-инвариантной римановой метрикой.*

□ На многообразии $\mathcal{Z}_P$ имеется риманова метрика, полученная ограничением стандартной евклидовой метрики на $\mathbb{C}^m \simeq \mathbb{R}^{2m}$. Поскольку эта метрика T^m-инвариантна, то же верно и про ее ограничение на T^m-инвариантное гладкое подмногообразие $\mathcal{Z}_P \subset \mathbb{C}^m$. Метрика на $\mathcal{Z}_P$ инвариантна относительно действия подгруппы $K \subset T^m$. Следовательно, ее можно спустить на фактор $X_P = \mathcal{Z}_P/K$. □

Заметим, что любая гладкая функция $\mathcal{Z}_P \to \mathbb{R}$, инвариантная относительно действия группы K, порождает гладкую функцию на X_P. Используем это наблюдение для того, чтобы построить функцию Морса на многообразии X_P.

Рассмотрим линейную функцию $f\colon P \to \mathbb{R}$. Она называется *функцией высоты* многогранника P, если f принимает разные значения на всех вершинах P. В частности, f непостоянна на каждом ребре многограника P и, следовательно, порождает ориентацию каждого из ребер.

Лемма 5.4. *Для любой функции высоты f функция $f \circ \pi\colon X_P \to \mathbb{R}$ является функцией Морса на X_P. Ее особые точки совпадают с неподвижными точками действия тора T^n на многообразии X_P.*

□ Докажем это, найдя критические точки функции $\tilde{f} = f \circ \pi \circ \pi_l = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k |z_k|^2$ на многообразии $\mathcal{Z}_P$. Здесь $\pi_l\colon \mathcal{Z}_P \to X_P$ – каноническая проекция на пространство орбит.

Линейная функция f на $\mathbb{R}^n$ продолжается до линейной функции F на пространстве $\mathbb{R}^m$ с тем условием, что ограничение продолжения на нормальное пространство к многограннику $i_P(P)$ нулевое. Поэтому $C_P\bar{a} = 0$, то есть вектор коэффициентов $\bar{a} = (a_k)$ лежит в образе отображения $A_P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Если $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathcal{Z}_P$ – критическая точка функции $\tilde{f}$, то это означает, что в объемлющем пространстве $\mathbb{C}^m$ имеет место равенство $\operatorname{grad}_{\tilde{f}}(z) = \sum\limits_{j=1}^{m-n} \lambda_j(z) \operatorname{grad}_{f_j}(z)$, где $f_j = \sum\limits_{k=1}^{m} c_{j,k}(|z_k|^2 - b_k)$ – квадратичные уравнения, задающие $\mathcal{Z}_P$. Вычислив градиенты явно, получим, что если $F = F_I = \bigcap\limits_{i \in I} F_i$ – грань, внутренность которой содержит точку $\rho_P(z)$, то точка z является критической точкой функции $\tilde{f}$, если и только если существуют такие числа $\lambda_j \in \mathbb{R}$, что $a_k = \sum\limits_{j \notin I} \lambda_j c_{j,k}$ при $k \in [1, m]$. В частности, верно утверждение, что если z является критической точкой функции $\tilde{f} = \sum a_k|z_k|^2$, то это же верно для всех остальных точек $z' \in \rho_P^{-1}(F_I)$, где $z \in \operatorname{Int} F_I$.

Обозначим через $C_{P,I}$ матрицу размера $(m-n)\times(m-|I|)$, полученную из матрицы C_P вычеркиванием соответствующих индексам из I столбцов. Тогда необходимое и достаточное условие того, чтобы градиент $\operatorname{grad}_{\tilde{f}}(z)$ функции $\tilde{f}$ в точке z на многообразии $\mathcal{Z}_P$ был отличен от нуля, состоит в том, чтобы вектор $\bar{a}_I = (a_j), j \notin I$, не лежал в пространстве V_I, порожденном строками матрицы $C_{P,I}$. Поскольку сам вектор $\bar{a}$ ортогонален всем строкам матрицы C_P, получаем, что все точки подмножества $\pi^{-1}(\operatorname{Int}(P)) \subset X_P$ являются регулярными.

Как мы уже показали выше, ранг матрицы $C_{P,I}$ всегда максимален и равен $(m-n)$. Следовательно, $\dim V_I = m-n$. Поэтому прообразы $\rho_P^{-1}(v) \in \mathcal{Z}_P$, где v – вершина P, всегда, независимо от выбора коэффициентов a_k, являются критическими подмногообразиями функции $\tilde{f}$. Следовательно, неподвижные точки действия тора на X_P являются критическими точками функции $f\circ\pi$. Отображение π_{l_*} порождает изоморфизм нормального пространства к орбите $\rho_P^{-1}(v) \subset \mathcal{Z}_P \cong T^{m-n}$ и касательного пространства $T_{\pi^{-1}(v)}(X_P)$, поэтому $\pi^{-1}(v)$ – невырожденная критическая точка функции $f\circ\pi$.

Если же мы, кроме того, выберем коэффициенты (a_j) так, чтобы соответствующие вектора $\bar{a}_I$ никогда не лежали в V_I при $|I| < n$, то, как было показано выше, функция $\tilde{f}$ не будет иметь других критических точек на $\mathcal{Z}_P$. Покажем, что это условие выполнено, если функция f не постоянна ни на одной грани многогранника P – или, что эквивалентно, функция F не постоянна ни на одной грани многогранника $i_P(P) \subset \mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$.

Грань многогранника $i_P(P) \subset \mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$, соответствующая множеству индексов гиперграней $I \subset [1,m]$, определяется уравнениями

$$C_Px = C_Pb_P,$$
$$x_i = 0,\ i \in I,$$

откуда следует, что все вектора $y \in \mathbb{R}^m$, параллельные данной грани, удовлетворяют уравнениям $C_Py = 0$ и $y_i = 0$, $i \in I$. Видно, что вектор a_I является линейной комбинацией строк матрицы $C_{P,I}$ тогда и только тогда, когда он ортогонален любому вектору y, параллельному грани, соответствующей множеству индексов $I \subset [1,m]$.

Поскольку функция $\tilde{f}$ постоянна на орбитах действия тора T^m, проекция ее градиента на пространство орбит свободного действия подгруппы $K \subset T^m$ ненулевая, если сам градиент не был равен нулю. Поэтому все точки X_P, кроме неподвижных точек действия, являются регулярными точками функции $f\circ\pi$ при таком выборе коэффициентов f. $\square$

Выкладка в локальных координатах показывает, что индекс каждой критической точки x функции $f\circ\pi$ равен удвоенному индексу вершины $\pi(x)$. Напомним, что индекс вершины v многогранника P, снабженного функцией высоты f, определяется как число ребер в вершине v, входящих в нее – с учетом ориентации, порожденной функцией f. Как следствие, получаем, что многообразие X_P гомотопически эквивалентно клеточному пространству, образованному клетками только четной размерности.

Найдем число критических точек функции f для каждого из индексов. Ответ связан с комбинаторными инвариантами многогранника P. В оставшейся части лекции мы будем считать, что P – произвольный простой многогранник; условие неособости нормального веера не накладывается.

Определение 5.5. *Коэффициенты производящего многочлена $F(t)$ числа граней простого многогранника P называются f-вектором многогранника P. Коэффициенты многочлена $G(u) = F(t+1)$ называются h-вектором многогранника P.*

Таким образом, $f_n = h_n = 1$, где n – размерность многогранника P. Для куба $T^3 \subset \mathbb{R}^3$ имеем $F(t) = t^3 + 6t^2 + 12t + 8$ и $G(u) = u^3 + 3u^2 + 3u + 1$.

Теорема 5.6. *(соотношения Дена-Соммервиля). Имеет место равенство* $h_k = h_{n-k}$ *для всех* k, $0 \leqslant k \leqslant [n/2]$.

□ Пусть $f\colon P \to \mathbb{R}$ – произвольная функция высоты; покажем, что число h_k равно числу вершин индекса k для f. Из этого утверждения автоматически следует исходная теорема, поскольку при замене функции f на противоположную вершины индексов k и $n-k$ меняются местами.

Доказательство проведем по индукции. Из определения следует, что компоненты f-вектора выражаются через компоненты h-вектора следующим образом:

$$f_n = h_n,$$
$$f_{n-1} = h_{n-1} + \binom{n}{1} h_n,$$
$$f_{n-2} = h_{n-2} + \binom{n-1}{1} h_{n-1} + \binom{n}{2} h_n,$$
$$\dots$$

Будем через I_k обозначать число вершин индекса k. Глобальный максимум функции f единственен, поэтому $h_n = I_n = 1$.

Далее, пусть v_F – вершина-максимум функции f на некоторой грани F многогранника P. Тогда индекс вершины v_F больше либо равен размерности грани F. Рассмотрим все гиперграни многогранника P. Индекс каждой вершины v_F для этих гиперграней равен либо n, и тогда это вершина-максимум, либо $(n-1)$. Но число гиперграней, примыкающих к вершине-максимуму, равно в точности $\binom{n}{1}$. Поэтому $f_{n-1} = I_{n-1} + \binom{n}{1} I_n$.

В общем случае, когда $k > 1$, доказательство проводится аналогично. К каждой вершине индекса $(n-l)$ примыкает в точности $\binom{n-l}{n-k} = \binom{n-l}{k-l}$ граней размерности $n-k$, для которых эта вершина является максимумом.

Следовательно, компоненты f-вектора одинаково выражаются и через h_k, и через I_k; переходя к обратной замене, получаем, что $h_k = I_k$ для всех k. □

6. Симплектическая геометрия и гамильтоновы действия тора

Определение 6.1. *Гладкое многообразие* M *называется симплектическим многообразием, если на* M *задана* 2*-форма* ω*, называемая симплектической формой, которая замкнута и всюду невырожденна. Многообразие с заданной на нем симплектической формой будем обозначать через* (M, ω).

Из определения сразу следует, что размерность M четна, поскольку невырожденные кососимметрические формы существуют лишь в четных размерностях. Если $\dim M = 2n$, то эквивалентный способ определить невырожденность 2-формы ω – указать, что старшая внешняя степень ω^n является *формой объема*, то есть отлична от нуля во всех точках многообразия M. Форма объема задает каноническую ориентацию на M.

Определение 6.2. *Если* (M, ω_M) *и* (N, ω_N) *– симплектические многообразия, то отображение* $f\colon M \to N$ *называется симплектоморфизмом, если* $f^*\omega_N = \omega_M$ *и* f *биективно.*

Из определения следует, что f является диффеоморфизмом, так как в противном случае обратный образ $f^*\omega_N^n$ старшей степени симплектической формы ω был бы нулевым в точке, где дифференциал отображения f имел нетривиальное ядро.

Для двумерных многообразий симплектическая структура – то же, что форма площади.

В отличие от многообразий, снабженных римановой метрикой, симплектические многообразия не имеют никаких локальных инвариантов.

Теорема 6.3. *(Дарбу). Пусть (M,ω) – симплектическое многообразие и $x \in M$ – некоторая точка. Тогда существует окрестность $U \subset M$ точки x и взаимно-однозначное отображение $f\colon U \to U_0$ такое, что $f^*\omega_0 = \omega$. Здесь ω_0 – симплектическая форма с постоянными коэффициентами, определенная в некоторой окрестности евклидова пространства $U_0 \subset \mathbb{R}^{2n}$, и $f(x) = 0$.*

□ Формы ω и ω_0 совпадают в точке x. Рассмотрим 1-форму φ на U, удовлетворяющую следующим условиям:

(1) $d\varphi = \omega_0 - \omega_1$,
(2) $\varphi = 0$ в точке x.

Пусть $t \in [0,1]$ и $\omega_t = \omega_0 + t(\omega - \omega_0)$. Тогда в малой окрестности точки x форма ω_t является симплектической формой для всех $t \in [0,1]$. Векторное поле X_t, определенное из формулы $\varphi = \omega_t(X_t,\cdot)$, порождает семейство диффеоморфизмов f_t окрестности точки x. Имеем $f_0 = id$ и $f_0^*(\omega_0) = \omega_0$.

Тогда $\frac{d}{dt}f_t^*(\omega_t) = f_t^*(L_{X_t}(\omega_t) + \frac{d}{dt}(\omega_t))$. Применим формулу Картана: $L_{X_t}(\omega_t) = d(\omega_t(X_t,\cdot)) + (d\omega_t)(X_t,\cdot,\cdot)$. Таким образом, $L_{X_t}(\omega_t) + \frac{d}{dt}(\omega_t)) = d\varphi + (\omega - \omega_0) = 0$, откуда $f_1^*(\omega) = \omega_0$. □

Укажем сразу эквивариантную формулировку этого утверждения (она понадобится в дальнейшем).

Теорема 6.4. *(эквивариантная версия теоремы Дарбу). Пусть (M,ω) – симплектическое многообразие с симплектическим действием компактной группы Ли G, а $x \in M$ – некоторая неподвижная точка действия. Тогда существует G-инвариантная окрестность $U \subset M$ точки x и эквивариантный диффеоморфизм $f\colon U \to U_0$ такой, что $f^*\omega_0 = \omega$, где ω_0 – симплектическая форма с постоянными коэффициентами, определенная в некотором открытом подмножестве евклидова пространства $U_0 \subset \mathbb{R}^{2n}$, а $f(x) = 0$. Действие группы G на U_0 переносится с линейного представления группы G в касательном пространстве в точке $x \in M$ при помощи экспоненциального отображения, порожденного G-инвариантной римановой метрикой на M.*

Существование симплектической структуры накладывает ряд условий на топологию многообразия. Очевидно, что поскольку $d\omega = 0$ и $\omega^n \neq 0$, когомологии де Рама многообразия M обязаны быть нетривиальны в четных размерностях, если M компактно. Менее очевидное условие – что симплектическое многообразие M также является *почти комплексным*, то есть существует поле линейных операторов $J \in \mathrm{End}(TM)$ такое, что $J^2 = -id$ в каждой точке многообразия. Приведем один из подходов к построению почти комплексной структуры.

Рассмотрим произвольную гладкую риманову метрику g на M. В каждой точке $x \in M$ определен оператор A, однозначно задающийся условием $g(X,AY) = \omega(X,Y)$ для всех $X,Y \in T_x(M)$. Коэффициенты оператора A выражаются через коэффициенты g и ω как рациональные функции, нигде не обращающиеся в ноль, а коэффициенты g и ω гладко зависят от точки $x \in M$. Рассмотрим полярное разложение оператора A: $A = BJ$, где

- B – симметрический (относительно g) положительно определенный оператор, коммутирующий с A,
- J ортогонален относительно g.

В случае, когда метрика g евклидова в данной точке, $B = \sqrt{AA^T}$, и поскольку форма ω кососимметрическая, $A = -A^T$ и оператор B коммутирует с A, поскольку существует базис, в котором $AA^T = E$.

Лемма 6.5. *Оператор J удовлетворяет тождеству $J^2 = -id$ и согласован с формой ω.*

Почти комплексная структура J называется *согласованной* с симплектической формой ω, если $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$ и $\omega(x,\ Jx)\ >\ 0$. Наличие римановой метрики позволяет всегда построить согласованную с данной формой почти комплексную структуру.

Имеется ряд общих нетривиальных результатов о существовании симплектических структур, таких, как теорема Громова (любое связное некомпактное почти комплексное многообразие является симплектическим) и теорема Таубса (связная сумма двух компактных четырехмерных многообразий с $b_2^+ > 0$ не может быть симплектическим многообразием). Существование почти комплексной структуры – топологический вопрос; в размерности четыре он полностью решается с помощью характеристических классов.

Далее нас будут интересовать действия групп на компактных многообразиях, сохраняющие симплектическую форму.

Мы будем предполагать, что группа G – связная, компактная и абелева, то есть является *компактным тором* T^k, где $k \geqslant 1$. В случае $k = 1$ группа G совпадает с мультипликативной группой комплексных чисел, по модулю равных единице, или просто *окружностью* S^1. Потребуем, чтобы действие группы G на многообразии M имело лишь изолированные неподвижные точки. Если M компактно, то это означает, что число неподвижных точек конечно. Отфакторизовав по подгруппе, действующей на M тривиально, получим эффективное действие тора T^k на M.

Условие сохранения симплектической структуры относительно действия является локальным и может быть записано в аналитических терминах. Пусть $H \subset T^k$ – некоторая однопараметрическая подгруппа, определяемая вектором $X \in \mathbb{R}^k$, лежащим в соответствующей алгебре Ли тора T^k. В случае $k = 1$ подгруппа H совпадает со всей группой $T^k = S^1$.

Условие, что форма ω инвариантна относительно действия, эквивалентно тому, что $L_X\omega = 0$ для инфинитезимального векторного поля действия X всюду на многообразии M. С другой стороны, $d\omega = 0$ на любом симплектическом многообразии, поскольку симплектическая форма замкнута.

Тем самым, условие инвариантности симплектической формы относительно действия равносильно условию $d(\omega(X, \cdot)) = 0$, то есть замкнутости формы $\omega(X, \cdot)$.

На множестве гладких функций симплектического многообразия возникает структура алгебры Ли, определяемая при помощи *скобки Пуассона*. По определению, $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$, где X_f, X_g – такие векторные поля, что $\omega(X_f, \cdot) = df$ и $\omega(X_g, \cdot) = dg$. Замкнутость формы ω влечет тождество Якоби для скобки Пуассона.

Определение 6.6. *Действие компактной группы Ли G на M называется гамильтоновым если выполнены следующие условия:*

1. Форма $i_X(\omega)$ точна для любого $X \in \mathfrak{g}^*$: $\omega(X, \cdot) = dH$, где $H\colon M \to \mathbb{R}$ – гладкая функция, называемая в этой ситуации гамильтонианом.

2. Отображение $\mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ является гомоморфизмом алгебр Ли.

Если группа G является абелевой, то условие (2) эквивалентно тому, что для любых полей $X, Y \in \mathfrak{g}$ имеем $\omega(X, Y) = 0$ в любой точке многообразия M. В частности, действие окружности гамильтоново, если и только если соответствующая 1-форма точна.

Поскольку любая замкнутая форма локально точна, ясно, что гамильтоновы действия не так уж редки среди всех симплектических действий тора. Как минимум, любое симплектическое действие окружности на многообразии M обязано быть гамильтоновым, если $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$. Имеется ряд результатов о том, когда симплектические действия тора являются гамильтоновыми, но лищь недавно был найден пример симплектического действия окружности, имеющего лишь изолированные неподвижные точки, но не являющегося гамильтоновым.

Среди компактных многообразий размерности два эффективные симплектические действия окружности возможны лишь на двумерной сфере (имеет две неподвижные точки и является гамильтоновым) либо на торе (не имеет неподвижных точек и гамильтоновым не является). Оказывается, похожий критерий имеет место для компактных четырехмерных многообразий: симплектическое действие окружности является гамильтоновым, если и только если оно имеет неподвижные точки. В следующих размерностях это уже не так.

7. Симплектическая редукция и теорема Атьи-Гийемина-Стернберга

Теорема 7.1. *(симплектическая редукция для компактного тора). Предположим, что связная компактная абелева группа Ли G действует гамильтоново на многообразии M (не обязательно компактном), и $y \in \mathfrak{g}^*$ – регулярное значение соответствующего гамильтониана μ. Если G действует свободно на компактном многообразии $\mu^{-1}(y)$, то многообразие $\mu^{-1}(y)/G$ наследует симплектическую форму с M.*

□ Покажем сперва, что любое многообразие уровня гамильтониана G-инвариантно. Если $X, Y \in \mathfrak{g}$ и $dH = \omega(X, \cdot)$, то $dH(Y) = \omega(X, Y) = 0$ в силу гамильтоновости действия. Поскольку компактная группа Ли действует свободно на $\mu^{-1}(y)$, фактор является гладким многообразием. Покажем, что симплектическая форма ω корректно спускается на фактор. Пусть v_1, v_2 – касательные вектора в точке фактора, тогда их прообразы определены с точностью до элемента из $\mathfrak{g}$, но $\omega(X, Y)$ для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$. Осталось проверить замкнутость формы на факторе. Форма ω на $\mu^{-1}(y)$ сама является обратным образом формы на факторе, поэтому если последняя форма была не замкнута, это же верно и для формы ω на $\mu^{-1}(y)$. □

Теорема применима в наших условиях: многообразие $M = \mathcal{Z}_P/K$ является симплектическим многообразием с действием тора $T^n = T^m/K$ половинной размерности и совпадает с торическим многообразием X_P, соответствующим многограннику P.

Проверим это. Пусть простой многогранник P задан, как и ранее, при помощи системы матричных неравенств $A_P x + b_p \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Условие того, что нормальный веер многогранника P неособ, эквивалентен следующему: нормальные вектора к гиперграням в каждой вершине многогранника P образуют базис решетки $\mathbb{Z}^n$. Как было указано выше, мы можем выбрать целочисленную матрицу коядра C_P, удовлетворяющую условию $C_P A_P = 0$.

Стандартное действие компактного тора T^m на пространстве $\mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$ является гамильтоновым. Следовательно, это же верно и для действия на $\mathbb{C}^m$ любой подгруппы тора T^m – в частности, для подгруппы $K = \ker l$.

В силу теоремы 4.4, многообразие $\mathcal{Z}_P$ является регулярным значением гамильтониана, соответствующего действию группы K. (Это значение равно $C_P b_P$). А в силу ранее доказанной леммы 4.7, подгруппа K действует на прообразе регулярного значения – многообразии $\mathcal{Z}_P$ – свободно, поэтому выполнены все предположения симплектической редукции. Фактормногообразие $X_P = \mathcal{Z}_P/K$, таким образом, является симплектическим.

Выбор базиса в алгебре Ли $\mathfrak{g}^*$ определяет базисные гамильтонианы. Гладкое отображение, порожденное ими, называется *отображением моментов*. В случае торического многообразия образ отображения моментов совпадает с выпуклым многогранником P. В случае гамильтонова действия окружности образ совпадает с отрезком вещественной прямой.

Теорема 7.2. *(Атья-Гийемин-Стернберг) Образ отображения моментов является выпуклым многогранником, а образы критических точек – вершинами многогранника.*

Определение 7.3. *Гладкая функция F на многообразии M называется функцией Морса-Ботта, если множеством ее критических точек является несвязное объединение связных подмногообразий $Z_i \subset M$ таких, что гессиан функции F, ограниченный на пространство $\nu_x(Z_i) = T_x(M)/T_x(Z_i)$ в каждой точке $x \in Z_i$ невырожден.*

В частности, если критические точки функции F изолированы, F является функцией Морса в традиционном смысле. Оказывается, если H – замкнутая однопараметрическая подгруппа тора T^k, действующего на M гамильтоново, то соответствующий подгруппе H гамильтониан обязательно является функцией Морса-Ботта. Мы докажем этот результат в чуть большей общности, которая затем потребуется для теоремы о выпуклости образа отображения моментов.

Определение 7.4. *Функция F на M называется почти периодическим гамильтонианом, если фазовый поток векторного поля X, определяемого правилом $i_X(\omega) = dF$, порождает в группе диффеоморфизмов M в себя замкнутую подгруппу, изоморфную тору. (Замыкание берется, например, в топологии, индуцированной топологией на метризованном пространстве касательного расслоения к M).*

Почти периодические гамильтонианы удобнее периодических, поскольку этот класс замкнут относительно взятия линейной комбинации с вещественными коэффициентами (нужно лишь, чтобы векторные поля коммутировали) – замкнутая подгруппа тора и произведение двух торов снова изоморфны некоторому тору.

Лемма 7.5. *Пусть G – компактная группа Ли, действующая гладко на многообразии M. Множество неподвижных точек действия группы G является несвязным объединением гладких подмногообразий в M.*

Лемма 7.6. *Почти периодический гамильтониан F является функцией Морса-Ботта. Его критические подмногообразия совпадают с подмногообразиями, неподвижными относительно действия тора T^k, порожденного фазовым потоком поля X, где $i_X(\omega) = dF$. Каждое критическое подмногообразие является симплектическим.*

Докажем это утверждение. Множество точек, неподвижных относительно действия тора T^k, совпадает со множеством точек, неподвижных относитетельно фазового потока X, так как действие T^k – замыкание действия потока X.

Условие, что $x \in M$ не является неподвижной точкой действия тора T^k, равносильно тому, что $i_X(\omega) \neq 0$ (так как форма ω невырожденна), а $i_X(\omega) = dF$ по определению гамильтоновости. Поэтому доказательства требует лишь утверждение о том, что F является функцией Морса-Ботта.

Пусть Z – некоторая связная компонента множества неподвижных точек действия тора T^k (и фазового потока X). Чтобы описать поведение тора T^k и функции F вблизи Z, нам потребуется почти комплексная структура, согласованная с формой ω.

Введем на M T^k-инвариантную риманову метрику; тогда, как было показано раньше, на M возникает и почти комплексная структура J, согласованная с формой ω. Важно отметить, что конструкция оператора J переносится без изменений на эквивариантный случай, поэтому можно считать, что действие тора T^k коммутирует с оператором J. Поскольку J ортогонален относительно введенной римановой метрики, в любой точке $x \in Z$ касательное и нормальное пространства $T_x(Z)$ и $\nu_x(Z)$ являются J-инвариантными – а также и T^k-инвариантными поскольку риманова метрика T^k-инвариантна. Отсюда, в частности, следует, что Z является симплектическим подмногообразием в M, поскольку $\omega(x, Jx) > 0$.

Действие T^k на $T_x(M)$ распадается на n неприводимых одномерных линейных представлений $V_1, \ldots, V_n$, каждое из которых комплексно-инвариантно. Без ограничения общности можем считать, что первые m представлений соответствуют разложению в прямую сумму пространства $T_x(Z) \subset T_x(M)$. Используем теперь эквивариантную теорему Дарбу в окрестности точки x: существует локальная система координат (p_i, q_i) в окрестности $U \subset M$ точки x, в которой форма имеет стандартный вид $\sum dp_i \wedge dq_i$, а действие тора T^k линейно на каждом из пространств $V_1, \ldots, V_n$. Каждое пространство линейного представления V_i в точке x совпадает с пространством, порожденным координатами p_i и q_i.

Действие элемента $\exp(tX)$, $t \in \mathbb{R}$, на нормальном пространстве $\nu_x(Z)$ также распадается в прямую сумму действий на координатных пространствах $V_{m+1}, \ldots, V_n$, поскольку $\exp(tX) \in T^k$.

Локально мы можем записать это действие в виде

$$\exp(tX) = (\exp(2\pi it\lambda_{m+1}), \ldots \exp(2\pi it\lambda_n)),$$

где $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$ – некоторые вещественные числа (отличные от нуля, так как действие нетривиально на нормальном пространстве к Z).

Поскольку в данной системе координат ω выглядит как стандартная симплектическая форма, получаем, что

$$X = \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j (q_j \frac{\partial}{\partial p_j} - p_j \frac{\partial}{\partial q_j}),$$

и следовательно,

$$dF = \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j (p_j dp_j + q_j dq_j),$$

$$F = \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j (p_j^2 + q_j^2) + const,$$

откуда, в частности, следует, что гессиан функции F невырожденен на пространстве $V_{m+1} \oplus \ldots \oplus V_n = \nu_x(Z)$. Видно, что индекс критического подмногообразия Z равен удвоенному числу отрицательных коэффициентов λ_j. Этот индекс постоянен на каждом связном критическом подмногообразии Z.

8. Доказательство теоремы Атьи-Гийемина-Стернберга

Лемма 8.1. *Почти периодический гамильтониан F имеет единственное критическое подмногообразие локального минимума Z_{min} и единственное критическое подмногообразие локального максимума Z_{max}. Для любого $t \in \mathbb{R}$ прообраз $F^{-1}(t)$ пуст или связен.*

Из теории функций Морса-Ботта известно, что

- $F^{-1}(t_0)$ и $F^{-1}(t_1)$ диффеоморфны, если между t_0 и t_1 нет критических значений,
- при проходе через критическое значение t, соответствующее связному критическому подмногообразию Z индекса λ, гомотопический тип слоя меняется так: к гладкому многообразию $F^{-1}(t - \varepsilon)$ приклеивается векторное расслоение ранга 2λ над Z, соответствующее подрасслоению в $\nu(Z)$, ограничение гессиана F на которое строго отрицательно.

Поскольку сферизация расслоения ранга r над Z несвязна только при $r = 1$, но все Z имеют четный индекс, число связных компонент может измениться, только если F проходит через критическое значение индекса 0 или $2n$. Поскольку M связно, число критических значений каждого из индексов 0 и $2n$ равно единице.

Если существует регулярное значение $t \in \mathbb{R}$ такое, что слой $f^{-1}(t)$ является несвязным гладким подмногообразием, то, поскольку $f^{-1}(t)$ является границей подмногообразия $M_- = \{x\colon F(x) \leqslant t\}$, любая связная компонента $f^{-1}(t)$ задает нетривиальный цикл в $H_{n-1}(M, \mathbb{Z}_2)$, что невозможно.

Лемма 8.2. *Пусть F – произвольная функция Морса-Ботта на M. Если многообразия $f^{-1}(t)$ связны при всех регулярных значениях $t \in \mathbb{R}$, то это верно и для произвольных значений t.*

Доказательство леммы следует из того факта, что прообраз $F^{-1}(t)$ особого значения t гомотопически эквивалентен неособому связному прообразу $F^{-1}(t - \varepsilon)$ с приклейкой связного пространства (векторного расслоения над связным критическим подмногообразием).

Перейдем теперь к доказательству теоремы Атьи-Гийемина-Стернберга.

Введем утверждения A_m – «прообраз $F^{-1}(t)$ связен или пуст для любого $t \in \mathbb{R}^m$» и B_m – «образ $F(M)$ является выпуклым», в которых $F\colon M \to \mathbb{R}^m$ – отображение, удовлетворяющее условиям теоремы. Утверждение A_1 было доказано выше, а утверждение B_1 верно по очевидным причинам.

Покажем, что $A_{n-1} \Longrightarrow B_n$. Рассмотрим композицию

$$M \xrightarrow{F} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^{n-1},$$

где π – некоторая проекция на гиперплоскость. Компоненты отображения $g = \pi \circ F$ являются коммутирующими почти периодическими гамильтонианами, поэтому для g по предположению верно утверждение A_{n-1}.

Следовательно, прообраз $g^{-1}(t)$ линейно связен для любого t. Тогда и образ $F(g^{-1}(t)) = F(M) \cap \pi^{-1}(t)$ линейно связен для любого t – то есть является отрезком, поскольку лежит на прямой $\pi^{-1}(t)$. Поскольку $\pi^{-1}(t)$ пробегает множество всех прямых в $\mathbb{R}^n$, утверждение B_n доказано.

Докажем теперь по индукции, что A_n верно. Поскольку все f_i – почти периодические гамильтонианы, множество регулярных значений плотно в образе F, как показывают следующие общие утверждения о гладких действиях компактной группы G на компактном многообразии W. Будем называть *типом орбит* (H) класс сопряженности подгруппы $H \subset G$, где H – стабилизатор точки $x \in W$. Любая подгруппа из этого класса является стабилизатором некоторой точки из орбиты x.

Лемма 8.3. *Гладкое действие G на W имеет конечное число различных типов орбит.*

Лемма 8.4. *Если пространство орбит W/G гладкого действия группы G связно, то существует такой тип орбит (H), что множество точек со стабилизаторами из (H) образует плотное открытое подмножество в W.*

В частности, если G коммутативна, то (H) состоит из единственной подгруппы, действующей тривиально на всем W. Если действие $G = T^k$ на W эффективно, то объединение свободных орбит открыто и всюду плотно в W.

Вернемся к доказательству теоремы. Как следствие из двух лемм о типах орбит действия получаем следующее утверждение.

Лемма 8.5. *Существует такое плотное открытое множество $U \subset M$ (дополнение к конечному числу подмногообразий), что для любой линейной комбинации гамильтонианов $\bar{f} = \sum \lambda_i f_i$ выполнено ровно одно из двух условий:*

(1) *порожденный потоком $\bar{f}$ тор действует тривиально на M*
(2) *$d\bar{f} \neq 0$ на U.*

В силу последней леммы можно считать, что функции $f_1, \ldots, f_n$ линейно независимы на плотном открытом множестве в M, в противном случае достаточно применить предположение индукции. По соображениям непрерывности достаточно доказать утверждение A_n для прообразов регулярных значений. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – регулярное значение функции F; докажем, что $F^{-1}(\xi)$ связно. Имеем $F^{-1}(\xi) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} f_i^{-1}(\xi_i)$. Рассмотрим неособое подмногообразие $N = \bigcap\limits_{i=1}^{n-1} f_i^{-1}(\xi_i)$. Оно связно по предположению индукции.

Покажем, что функция f_n является функцией Морса-Ботта на N, имеющей только критические точки четных индексов. Критические точки f_n на N совпадают со множеством точек на N, в которых $df_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i df_i$. Пусть $\tilde{f} = f_n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i f_i$ – соответствующий почти периодический гамильтониан. Множество критических точек $\tilde{f}$ является неособым подмногообразием Z в M, инвариантным относительно действия порожденного $\tilde{f}$ тора. В силу леммы о конечности числа типов орбит, множество различных построенных так подмногообразий $Z \subset M$ конечно.

Лемма 8.6. *Многообразия N и Z пересекаются трансверсально.*

Достаточно проверить, что дифференциалы $df_1, \ldots, df_{n-1}$ соответствующих функций на Z линейно независимы. Поскольку векторные поля X_i и $\tilde{X}$ (где $i_{\tilde{X}}(\omega) = d\tilde{f}$) коммутируют, многообразие Z инвариантно относительно действия всех полей $X_1, \ldots, X_{n-1}$ – то есть поля X_i, $i = 1 \ldots n-1$, являются касательными к Z. Ограничение симплектической формы ω на Z невырожденно. Поскольку $X_1, \ldots, X_{n-1}$ линейно независимы в касательном пространстве к M и при этом являются касательными к Z, для любой точки $z \in Z \cap N$ и линейной комбинации $\sum \alpha_i X_i$ существует вектор $Y \in T_z(Z)$ такой, что $\omega(\sum \alpha_i X_i, Y) \neq 0$, то есть $(\sum \alpha_i df_i(z))(Y) \neq 0$.

Осталось доказать последнее утверждение теоремы: что выпуклое тело – образ $F(M)$, на самом деле является выпуклой оболочкой конечного числа точек. Если Z – множество нулей векторных полей $X_1, \ldots, X_n$, то Z является множеством неподвижных точек действия соответствующего компактного тора T^k и, тем самым, распадается в несвязное объединение критических подмногообразий Z_j. Отображение F постоянно на каждом Z_j. Заметим теперь следующее: если $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ – произвольный почти периодический гамильтониан, порождающий тор T^k, то одна из точек вида $F(Z_j)$ является его (не обязательно строгим) минимумом. Но гамильтонианы с таким свойством плотны в пространстве всех линейных комбинаций функций f_i. Отсюда следует, что образ $F(M)$ является выпуклой оболочкой точек $F(Z_j)$ – в противном случае некоторая линейная функция вида «нормаль к гиперграни выпуклой оболочки» достигала бы своего минимума вне Z.

9. Теорема Дельзана

Теорема 9.1. *Предположим, что компактное связное симплектическое многообразие без края M^{2n} допускает эффективное гамильтоново действие тора T^n. Тогда существует такая малая эквивариантная деформация симплектической формы на M^{2n}, что*

(1) *образ отображения моментов является простым многогранником P.*
(2) *нормали к гиперграням P, сходящимся в одной вершине, образуют базис решетки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$.*
(3) *многогранник P является рациональным, то есть координаты любых двух его вершин различаются на рациональный вектор.*

Если условие 3 выполнено, то, домножив симплектическую форму на соответствующий целый множитель и сдвинув одну из вершин многогранника P в начало координат, получим, что вершины P лежат в точках целочисленной решетки.

Вот примерный план доказательства:

- нужно исследовать веса действия тора в вершинах, связать их с векторами ребер и нормалей многогранника P и показать, что P – простой;
- нужно показать, что исходная симплектическая форма деформируется в классе эквивариантных 2-форм в рациональную симплектическую;
- нужно связать значения отображения моментов в вершинах с весами действия и интегралами симплектической формы по 2-циклам.

Пусть $A = a_{ij}$ – целочисленная квадратная матрица весов в данной неподвижной точке v.

Пусть v – неподвижная точка действия тора T^k на $M = M^{2n}$. Обозначим через a_{ij} веса действия тора в точке v; веса $a_{i1}, \dots, a_{ik}$ соответствуют одному неприводимому представлению тора T^k.

Лемма 9.2. *Матрица $A = a_{ij}$ невырожденна.*

Предположим, что линейное отображение $A\colon \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^n$ имеет нетривиальное ядро, $Ay = 0$, где $y = (y_1, \dots, y_k)$. Тогда одномерная координатная подгруппа тора T^k, определяемая вектором y, действует тривиально на $T_v(M)$, а значит, и в некоторой окрестности v. Поскольку действие эффективно, а M связно, приходим к противоречию.

Лемма 9.3. $\det A = \pm 1$.

Предположим, что это не так; тогда отображение $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ переводит в точку целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ некоторый вектор x не из решетки. Если $Ax \in \mathbb{Z}^n$, то элемент тора T^n, являющийся образом вектора $Ax \in R^n$ при канонической проекции $\mathbb{R}^n \to \mathbb{Z}^n$, действует тривиально на $T_v(M)$, а поскольку действие тора эффективно, проекция вектора x на T^n сама должна быть тривиальной – то есть $x \in \mathbb{Z}^n$.

Пусть a_i – вектор весов матрицы A, соответствующий одномерному комплексному представлению V_i в точке v. Тогда каждая из $(n-1)$ одномерных торических подгрупп, порожденных столбцами матрицы A^{-1} (кроме i-го) действует тривиально на V_i. Порожденный этими подгруппами тор $T_i^{n-1} \subset T^n$ действует тривиально на V_i и нетривиально на остальных пространствах одномерных представлений в точке v.

Рассмотрим множество неподвижных точек действия тора T_i^{n-1}. У него есть неприводимая двумерная компонента, на которой нетривиально действует окружность T^n/T_i^{n-1}, поэтому эта компонента эквивариантно симплектоморфна стандартной двумерной сфере. Неподвижные точки действия окружности T^n/T_i^{n-1} на этой сфере являются также и неподвижными точками действия тора T_i^{n-1}, а следовательно – и неподвижными точками действия T^n. Одна из неподвижных точек действия на этой сфере нам известна – это v. Обозначим вторую точку через v', а соединяющую их сферу – через $S_{vv'}$.

Лемма 9.4. *Образ сферы $S_{vv'}$ относительно отображения моментов является ребром многогранника P.*

Пусть $b \in \mathbb{Z}^n$ – некоторый целочисленный вектор, определяющий однопараметрическую подгруппу в торе T^n. Тогда вес действия этой подгруппы на одномерном пространстве V_i равен в точности скалярному произведению (a_i, b). Если $(\tilde{a}_j)$ – столбцы матрицы A^{-1} (то есть $(a_i, \tilde{a}_j) = \delta^i_j$), то положим $b = \sum\limits_{j \neq i} \tilde{a}_j$. Тогда $(a_j, b) = 1 - \delta^i_j$.

Как было показано ранее, соответствующий вектору b гамильтониан в окрестности точки v имеет вид $\sum\limits_{j=1}^{n} (a_j, b)(p_j^2 + q_j^2)$. Получаем, что гамильтониан тождественно равен нулю на плоскости $p_j = q_j = 0$, $j \neq i$, совпадающей с касательным пространством к сфере $T_v(S_{vv'})$, и строго положителен в остальных точках.

Это означает, что пересечение соответствующей опорной плоскости с многогранником P состоит лишь из образа сферы $S_{vv'}$ при отображении моментов. Образ сферы одномерен, поскольку отображение моментов постоянно на слоях действия тора T^n. Поскольку пересечение выпуклых множеств выпукло, образ является отрезком прямой.

Следствие 9.5. *Многогранник P является простым.*

Аналогично доказательству последней леммы, для любого множества ребер в данной вершине мы можем найти гамильтониан, обращающийся в ноль на подпространствах, соответствующим этим ребрам, и строго положительный на дополнительных подпространствах.

Лемма 9.6. *Координаты отрезка-образа сферы $S_{vv'}$ пропорциональны вектору весов a_i.*

Достаточно проверить это утверждение локально в точке v. Одномерному координатному тору $T_j \subset T^n$ соответствует вектор $b = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Тогда значение j-й компоненты отображения моментов в точке плоскости $p_j{=}q_j{=}0$, $j \neq i$, с координатами (p_i, q_i) равно $a_{ij}(p_i^2 + q_i^2)$, то есть отличается от a_{ij} на ненулевой множитель, одинаковый для всех индексов j.

Если вектора a_i пропорциональны векторам ребер простого многогранника P, то отсюда следует, что вектора $\tilde{a}_j$ являются нормалями к гиперграням P. Это доказывает второе утверждение теоремы Дельзана. Осталось установить, что многогранник является рациональным.

Лемма 9.7. *(см. Pelayo-Ratiu, 2011). Симплектическая форма ω деформируется в классе эквивариантных 2-форм в симплектическую форму, имеющую рациональные интегралы по всем 2-циклам, причем деформация может быть выбрана сколь угодно малой.*

Это утверждение легко выводится из того факта, что вложение $\Omega^*_G(M) \to \Omega^*(M)$ пространства инвариантных относительно действия компактной группы G дифференциальных форм в пространство всех дифференциальных форм индуцирует изоморфизм в когомологиях многообразия M.

Используя последнюю лемму, вычислим разность отображений моментов в точках v и v'. Пусть b – произвольная одномерная торическая подгруппа, нетривиально действующая на $S_{vv'}$, а F – соответствующий ей гамильтониан. Необходимо показать, что $F(v') - F(v) \in \mathbb{Q}$.

Выберем гладкий путь l на $S_{vv'}$, ведущий из точки v в точку v' и трансверсальный орбитам действия. Тогда
$$F(v') - F(v) = \int\limits_l dF = \int\limits_l i_X(\omega),$$
где X – векторное поле, порождающее действие однопараметрической подгруппы. Действие X можно считать стандартным на сфере $S_{vv'} = S^2$.

Лемма 9.8. *Если поле X всюду трансверсально пути l (это на самом деле техническое условие), то* $\int\limits_l i_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^2} \omega$.

Для доказательства заметим, что утверждение является локальной выкладкой относительно маленькой части L пути l. Можно считать, что касательный вектор к L имеет вид $\frac{\partial}{\partial x_1}$, тогда образ пути L относительно действия диффеоморфен стандартному кольцу $A \subset \mathbb{R}^2$. Можем считать, что $A = \{r_0 \leqslant r \leqslant r_0 + \varepsilon\}$, а координаты в A выбраны следующим образом: путь L совпадает с отрезком на положительной части оси абсцисс, орбиты действия совпадают со орбитами стандарного действия S^1 на $\mathbb{C}$. Поскольку форма ω инвариантна относительно действия, $\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial \varphi}} = 0$ и $\omega = \omega(r)$. Утверждение леммы теперь сводится к кратному интегралу в полярных координатах.

Поскольку инвариантную форму ω можно продеформировать так, чтобы последнее число всегда было рационально, теорема доказана.

Если известно лишь, что исходное действие симплектическое, но не гамильтоново, мы можем построить отображение Морса-Ботта $M \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, обладающее аналогичными гамильтониану свойствами. В частности, неподвижные точки действия будут критическими точками построенного отображения с теми же индексами, что и раньше. Поскольку матрица весов действия в любой неподвижной точке невырожденна, можно выбрать n функций с линейно независимыми градиентами, у которых данная вершина будет строгим экстремумом – что невозможно для отображения Морса-Ботта в $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, имеющего лишь критические точки четных индексов. Поэтому эффективное симплектическое действие тора половинной размерности, имеющее хотя бы одну неподвижную точку, всегда гамильтоново.

Другой вариант этого рассуждения: рассмотрим поднятие периодического потока $\tilde{X}$ на универсальное накрытие $\tilde{M}$. Поскольку действие тора эффективно и имеет половинную размерность, подпространство свободного действия всюду плотно, а значит, любая замкнутая орбита односвязна. Это означает, что любое поднятие периодического потока на $\tilde{M}$ также является периодическим потоком, который уже гамильтонов, так как $\tilde{M}$ односвязно. Рассмотрим периодический поток в M, имеющий в данной неподвижной точке v строго положительные веса. Тогда его прообраз в $\tilde{M}$ также является неподвижной точкой, имеющей положительные веса, поэтому этот прообраз единственен, иначе $\tilde{M}$ было бы несвязно.

10. Конструкция Кокса и проективные вложения торических многообразий

Действие группы Ли G на многообразии M называется собственным, если отображение $G \times M \to M \times M$; $(g, x) \mapsto (gx, x)$, является собственным (прообраз любого компакта – компакт).

Теорема 10.1. *Пусть комплексная группа Ли G действует голоморфно, свободно и собственно на комплексном многообразии M. Тогда пространство орбит M/G есть топологическое многообразие, причем на M/G существует и единственна комплексная структура такая, что естественная проекция $M \to M/G$ – голоморфное отображение.*

Пусть F – неособый веер, A – матрица 1-конусов. Рассмотрим короткую точную последовательность

$$1 \to (\mathbb{C}^*)^{m-n} \xrightarrow{i} (\mathbb{C}^*)^m \xrightarrow{A} (\mathbb{C}^*)^n \to 1.$$

Определим открытое плотное подмножество $U(F) \subset \mathbb{C}^m$ следующим образом. $U(F)$ получается из пространства $\mathbb{C}^m$ выбрасыванием всех координатных плоскостей $\mathbb{C}_I$, где $I \subset [1, m]$ – множество индексов 1-конусов, не порождающих конус в веере F, а $\mathbb{C}_I = \{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m | z_i = 0 \text{ при } i \in I\}$.

Рассмотрим для примера веер, порождающий $\mathbb{C}P^2$. Тогда единственное множество индексов 1-конусов, не порождающих конус – это все множество $\{1, 2, 3\}$. (Вообще, множество всех индексов $I = \{1, \ldots, m\}$ не порождает конус ни в каком полном веере F). Следовательно, в этом случае $U(F) = \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$.

Отметим, что пространство $U(F)$ полностью определяется комбинаторикой веера F.

Лемма 10.2. *Группа $K_{\mathbb{C}} = \ker i \subset (\mathbb{C}^*)^m$ действует свободно на $U(F)$.*

□ Доказательство полностью аналогично доказательству соответствующей леммы для моменту-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$ и подгруппы K (см. ранее). □

Вообще, если веер F является нормальным веером некоторого простого многогранника P, то момент-угол многообразие $\mathcal{Z}_P$ является T^m-эквивариантным строгим деформационным ретрактом пространства $U(F)$.

Непосредственно проверяется также и то, что действие группы $K_{\mathbb{C}}$ на $U(F)$ является собственным.

Определение 10.3. *Фактор $X_F = U(F)/K_{\mathbb{C}}$ называется торическим многообразием, соответствующим вееру F.*

Например, для веера F, рассмотренного выше, группа $K_{\mathbb{C}}$ является одномерной диагональной подгруппой в торе $(\mathbb{C}^*)^3$. Очевидно, $(\mathbb{C}^3 \setminus \{0\})/K_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}P^2$.

Пусть теперь P – простой многогранник. Напомним, что нормальный веер многогранника P определяется следующим образом: нормали к гиперграням многогранника P являются одномерными конусами, а на одномерные конуса натянут симплициальный конус соответствующей размерности, если и только если соответствующие гиперграни в P имеют непустое пересечение.

Если многогранник P определен системой неравенств $A_Px+b_P \geqslant 0$, то мы можем рассмотреть аффинное вложение $i_P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, заданное формулой $i_P(x) = A_Px + b_P$; по определению имеем $i_P(P) = \mathrm{Im}(i_P) \cap \mathbb{R}^m_{\geqslant 0}$. Решетка $A_P(\mathbb{Z}^n)$ является прямым слагаемым в $\mathbb{Z}^m$ в силу неособости многогранника P, а множество $i_P(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^m$ является сдвигом решетки $A_P(\mathbb{Z}^n)$ на целочисленный вектор. Имеем $i_P(P \cap \mathbb{Z}^n) = i_P(P) \cap \mathbb{Z}^m$.

Вектор $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$ определяет голоморфный моном $f_a = z_1^{a_1} \dots z_n^{a_n}$. Ограничение функции f_a на подгруппу $K_\mathbb{C} \subset (\mathbb{C}^*)^m \subset \mathbb{C}^m$ определяет характер $\chi_a\colon K_\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$. Если $z \in \mathbb{C}^m$ и $t \in K_\mathbb{C}$, то, очевидно, $f_a(tz) = \chi_a(t)f_a(z)$.

Лемма 10.4. *Вектора a_1 и a_2 определяют один и тот же характер группы $K_\mathbb{C}$, если и только если $a_1 - a_2 \in \mathrm{Im}(A_P)$.*

Доказательство остается в качестве упражнения.

Следствие 10.5. *Все вектора из множества точек $i_P(P) \cap \mathbb{Z}^m$ задают один и тот же характер группы $K_\mathbb{C}$.*

Следствие 10.6. *Пусть P – неособый многогранник и F – его нормальный веер. Предположим, что $a_1, \dots a_N \in i_P(P) \cap \mathbb{Z}^m$ – набор векторов, удовлетворяющих следующему условию: для любой точки $z \in U(F)$ найдется вектор a_i такой, что $f_{a_i}(z) \neq 0$.*

Тогда отображение $f\colon U_F \to \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$, заданное формулой $z \mapsto (f_{a_1}(z), \dots, f_{a_N}(z))$, порождает отображение $\tilde{f}\colon U(F)/K_\mathbb{C} \to \mathbb{C}P^{N-1}$.

Лемма 10.7. *Набор векторов $a_1, \dots, a_N$, соответствующий вершинам многогранника $i_P(P)$, удовлетворяет условиям леммы 10.6.*

Соответствующее голоморфное проективное отображение $X_P \to \mathbb{C}P^{N-1}$ является конечным морфизмом. Оказывается, его можно продолжить до голоморфного проективного вложения многообразия X_P.

Теорема 10.8. *Для каждой вершины $v \in i_P(P)$ и ребра $r \subset i_P(P)$, содержащего вершину v рассмотрим целую точку $b_{v,r} = b_j$, являющуюся ближайшей к вершине v на ребре r (это может быть вторая вершина ребра r, если на нем нет других целых точек). Добавим к построенному выше множеству $a_1, \dots, a_N$ множество векторов $b_{v,r}$ (выкинув все повторения из получившегося множества). Тогда совокупность полученных целочисленных векторов порождает голоморфное вложение многообразия X_P в $\mathbb{C}P^M$.*

Следствие 10.9. *Пусть $p_1, \dots p_M$ – точки множества $i_P(P) \cap \mathbb{Z}^m$. Тогда соответствующие им мономы порождают проективное вложение многообразия X_P в $\mathbb{C}P^{M-1}$.*

Пример 10.10. (вложение Веронезе) Рассмотрим в качестве многогранника P двумерный симплекс с вершинами $(0,0), (d,0)$ и $(0,d)$, где d – натуральное число. Соответствующий нормальный веер F не зависит от d и определяет торическое многообразие $\mathbb{C}P^2$. Имеем $U(F) = \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$.

Образ $i_P(P)$ – это симплекс в $\mathbb{R}^3$ с вершинами $(d,0,0), (0,d,0), (0,0,d)$. Точки $p_1, \dots, p_M$ имеют вид (d_1, d_2, d_3), где $d_i \geqslant 0$ и $d_1 + d_2 + d_3 = d$.

Получаем мономиальное отображение $(z_0, z_1, z_2) \mapsto (z_0^d, z_0^{d-1}z_1, \dots, z_2^d)$, продолжающееся до хорошо известного проективного вложения Веронезе $[z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [z_0^d : z_0^{d-1}z_1 : \ldots : z_2^d]$.

Согласно результату теоремы, достаточно и девяти мономов, чтобы задать вложение, которое в таком случае имеет вид

$$[z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [z_0^d : z_0^{d-1}z_1 : z_0^{d-1}z_2 : z_1^d : z_1^{d-1}z_0 : z_1^{d-1}z_2 : z_2^d : z_2^{d-1}z_0 : z_2^{d-1}z_1].$$

Если $d = 2$, то количество мономов сокращается до шести (вершины и середины сторон). Отображение в этом случае имеет вид $[z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [z_0^2 : z_0z_1 : z_0z_2 : z_1^2 : z_1z_2 : z_2^2]$.

Если $d = 1$, то получаем тождественное отображение $\mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$, являющееся проективным вложением $\mathbb{C}P^2$ в себя.

Приведем еще один пример применения теоремы 10.1 о голоморфном действии: комплексные структуры на момент-угол многообразиях.

Пусть $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Тогда определено вложение аддитивной группы $\mathbb{C}$ в группу $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, заданное формулой $z \mapsto (e^z, e^{wz})$. Группа $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ действует на произведении пространств $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ для любых m и n (действие каждого сомножителя диагонально на своем пространстве). Но факторизация $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ по действию подгруппы $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ дает некэлерову комплексную структуру на произведении сфер $S^{2n+1} \times S^{2m+1}$ – многообразие Калаби-Экмана.

Этот пример обобщается на произвольные момент-угол многообразия.

Теорема 10.11. *Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ – простой многогранник с m гипергранями. Предположим, что число $(m-n)$ четно; пусть $l = \frac{m-n}{2}$. Рассмотрим вложение $\mathbb{C}^l \to (\mathbb{C}^*)^{m-n}$, заданное формулой $(z_1, \ldots, z_l) \to (e^{z_1}, e^{w_1 z_1}, \ldots, e^{z_l}, e^{w_l z_l})$, где $w_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Подгруппа $K_{\mathbb{C}}$ неканонически изоморфна $(\mathbb{C}^*)^{m-n}$; пусть $H_K \subset K_{\mathbb{C}}$ – образ аддитивной подгруппы $\mathbb{C}^l \subset (\mathbb{C}^*)^{m-n}$ относительно какого-либо неканонического изоморфизма $K_{\mathbb{C}}$ и $(\mathbb{C}^*)^{m-n}$.*

Если F – нормальный веер многогранника P, то тогда группа H_K действует на $U(F)$ собственно, а фактор $U(F)/H_K$ диффеоморфен момент-угол многообразию $\mathcal{Z}_P$, на котором, таким образом, возникает комплексная структура. Эта структура всегда некэлерова.

Если число $(m-n)$ нечетно, то комплексная структура строится аналогичным образом на многообразии $\mathcal{Z}_P \times S^1$.

11. Локализация для неэквивариантных характеристических классов.

В этой лекции мы будем предполагать известными определения гладких векторных расслоений и характеристических классов Чженя и Понтрягина.

Теорема 11.1. *(ABBV-локализация для неэквивариантных когомологий: классы Чженя).*

Предположим, что окружность действует на гладком почти комплексном многообразии M вещественной размерности $2n$ с сохранением почти комплексной структуры, и все неподвижные точки действия являются изолированными.

Пусть $P(c_1, \ldots, c_n)$ – некоторый многочлен от классов Чженя степени не выше n. Тогда имеет место равенство

$$\langle P(c_1, \ldots, c_n), [M] \rangle = \sum_p \frac{P(\sigma_1(w_i), \ldots, \sigma_n(w_i))}{w_1 \ldots w_n},$$

где $w_i = w_i(p), i = 1 \ldots n$ – веса действия в данной неподвижной точке p, $\sigma_j(w_i)$ – j-й элементарный симметрический многочлен от весов w_i в данной точке p.

Теорема дает эффективный способ вычисления чисел Чженя многообразий с почти комплексным действием окружности. В частном случае, для $P = c_n$, получаем, что числитель и знаменатель каждой дроби совпадают – то есть интеграл от класса c_n по M равен числу неподвижных точек или эйлеровой характеристике, как и должно быть.

Если степень многочлена меньше n, то левая часть формулы локализации по определению равна нулю. В частности, это всегда верно для многочлена $P = 1$. Таким образом, веса действия в разных точках оказываются связанными между собой через некоторую систему диофантовых уравнений.

Пример 11.2. Вычислим характеристические числа Чженя проективной прямой $\mathbb{C}P^1$, рассматриваемой как комплексное многообразие. Действие окружности задается стандартной формулой $t \cdot [z_0 : z_1] = [z_0 : tz_1]$. В аффинных картах действие является просто линейным. Веса в неподвижных точках, таким образом, равны 1 и -1.

Для многочленов $P = 1$ и $P = c_1$ имеем $\frac{1}{1} + \frac{1}{-1} = 0$, $\frac{1}{1} + \frac{-1}{-1} = 2$, как и должно быть, поскольку $\langle c_n(M^{2n}), [M^{2n}] \rangle = \chi(M^{2n})$, если M^{2n} – почти комплексное многообразие, и $\chi(\mathbb{C}P^1) = \chi(S^2) = 2$.

Теорема локализации позволяет эффективно вычислять характеристические числа торических многообразий.

Лемма 11.3. *Пусть P – неособый многогранник. Как было сказано ранее, точка $b \in \mathbb{Z}^n$ определяет однопараметрическую подгруппу G_b в T^n. Пусть $v \in P$ – некоторая вершина, а $x \in X_P$ – соответствующая ей неподвижная точка действия тора на торическом многообразии. Тогда веса действия подгруппы G_b в точке x равны скалярным произведениям вектора b с векторами ребер, выходящими из v.*

Напомним, что вектором ребра неособого многогранника называется целочисленный примитивный вектор, сонаправленный данному ребру.

Аналогичное этой лемме утверждение верно и для торических многообразий, происходящих из вееров: нужно вместо ребер взять образующие двойственного конуса в данной неподвижной точке.

Пример 11.4. Пусть P_a – четырехугольник с вершинами в точках $(0,0), (a,0), (1,1), (0,1)$. Несложно показать, что многогранник P_a неособ. Вычислим характеристические числа соответствующего многообразия X_{P_a} при помощи теоремы локализации.

Выберем какую-нибудь однопараметрическую подгруппу, действующую на X_{P_a} с изолированными неподвижными точками. Необходимое и достаточное условие этого – чтобы соответствующий вектор $b \in \mathbb{Z}^2$ не был ортогонален ни одному ребру четырехугольника P_a. Например, мы можем выбрать вектор $b = (2,1)$.

Веса в точке $(0,0)$ равны 2 и 1.

Веса в точке $(a,0)$ равны $-2a+3$ и -2.

Веса в точке $(1,1)$ равны -2 и $2a-3$.

Веса в точке $(0,1)$ равны -1 и 2.

Таким образом, для $P = 1$ имеем $\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2a-3)} + \frac{1}{-2(2a-3)} + \frac{1}{-2} = 0$, как и должно быть.

Для $P = c_1$ имеем $\frac{2+1}{2} + \frac{-2a+3-2}{2(2a-3)} + \frac{-2+2a-3}{-2(2a-3)} + \frac{-1+2}{-2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{-2a+1}{2(2a-3)} - \frac{2a-5}{2(2a-3)} = 1 + \frac{-4a+6}{4a-6} = 0$.

Для многочленов $P = c_2$ и $P = c_1^2$ ответы уже не обязаны быть ненулевыми. Эйлерова характеристика торического многообразия равна числу вершин соответствующего многогранника (оно же – число неподвижных точек действия). Поэтому $c_2(X_{P_a}) = 4$.

Наконец, вычислим c_1^2. Имеем $c_1^2(X_{P_a}) = \frac{9}{2} + \frac{(1-2a)^2}{2(2a-3)} + \frac{(2a-5)^2}{-2(2a-3)} + \frac{1}{-2} = 4 + \frac{2(2a-3)4}{2(2a-3)} = 8$. Ответ не зависит от a. Это можно увидеть непосредственно: поскольку все торические многообразия рациональны, их род Тодда (арифметический род) равен единице. Арифметический род неособой комплексной поверхности равен $\frac{c_1^2+c_2}{12}$. Поскольку для многообразия X_{P_a} число c_2 равно четырем, число c_1^2 должно быть равно восьми.

При $a = 1$ соответствующий многогранник – квадрат – является произведением отрезков, поэтому $X_{P_1} = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$. Соответствующие характеристические числа в этом случае можно вычислить и непосредственно.

Теорема 11.5. *(ABBV-локализация для неэквивариантных когомологий: классы Понтрягина).*

Предположим, что окружность действует на гладком ориентированном многообразии M вещественной размерности $2n$ и все неподвижные точки действия являются *изолированными. В этом случае веса действия в неподвижной точке определены лишь с точностью до знака; мы считаем их положительными числами.*

Пусть $P(p_1, \dots, p_n)$ – некоторый многочлен от классов Чженя степени не выше $n/2$. Тогда имеет место равенство

$$\langle P(p_1, \dots, p_n), [M] \rangle = \sum_p \operatorname{sign}(p) \frac{P(\sigma_1(w_i^2), \dots, \sigma_n(w_i^2))}{w_1 \dots w_n},$$

где $w_i = w_i(p), i = 1 \dots n$ – веса действия в данной точке p, $\sigma_j(w_i^2)$ – j-й элементарный симметрический многочлен от квадратов весов w_i^2 в данной точке p. Знак $\operatorname{sign}(p)$ *определен следующим образом: он равен ± 1 в зависимости от того, совпадает ли в данной точке ориентация многообразия и ориентация касательного пространства, определенная действием окружности в каждом неприводимом двумерном представлении.*

Известно, что характеристические числа ориентированного многообразия равны нулю, если это многообразие ограничивается другим ориентированным многообразием на единицу большей размерности.

Пример 11.6. На единичной сфере $S^{2n} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ определено ортогональное действие окружности по формуле

$$t \cdot (y, z_1, \dots, z_n) = (y, tz_1, \dots, tz_n).$$

Веса действия в двух неподвижных точках $(\pm 1, 0, \dots, 0)$ равны $(1, \dots, 1)$. Отсюда заключаем, что знаки неподвижных точек равны 1 и -1 (иначе теорема локализации не выполнена для класса $P = 1$). По-другому это можно увидеть так: антиподальная инволюция меняет ориентацию четномерной сферы, но переводит в себя двумерные инвариантные подпространства в неподвижных точках с сохранением ориентации.

Вычисление показывает, что все числа Понтрягина сферы S^{2n} равны нулю (что ожидаемо, поскольку $S^{2n} = \partial D^{2n+1}$).

Теорема 11.7. *Не существует действия компактного тора T^n на замкнутом ориентируемом многообразии M, имеющего ровно одну неподвижную точку.*

□ Множество подгрупп T^n, являющихся стабилизаторами какой-либо точки в M, конечно. Поэтому существует вектор в касательной алгебре Ли группы T^n, не являющийся касательным ни к одной из подгрупп-стабилизаторов. Этот вектор можно считать рациональным, то есть он порождает некоторую однопараметрическую подгруппу $S^1 \subset T^n$, также действующую на M с ровно одной неподвижной точкой. Все веса действия S^1 в данной точке отличны от нуля. Это противоречит теореме локализации, написанной для единичного характеристического класса Понтрягина. □

Пример 11.8. Любое симплектическое действие окружности на четырехмерном компактном многообразии M, имеющее хотя бы одну неподвижную точку, является гамильтоновым.

□ Вспомним, что для симплектического действия, не являющегося гамильтоновым, определено «отображение моментов» $f\colon M \to S^1$, имеющее дословно те же локальные свойства, что и стандартное отображение моментов. В частности, все критические точки имеют только четные индексы.

Без ограничения общности можно считать M связным. Тогда у соответствующего отображения $M \to S^1$ не может быть локальных минимумов и максимумов, поскольку разные связные компоненты прообраза $f^{-1}(t)$ не могут склеиваться между собой при проходе через критическое значение, соответствующее точке четного индекса.

Получаем, что у отображения f есть лишь точки индекса 2. Это значит, что в каждой неподвижной точке действия окружности на M один из весов является положительным, и один – отрицательным. Этот факт, в свою очередь, противоречит теореме локализации для единичного класса Чженя – левая часть равна нулю, а правая является суммой строго отрицательных слагаемых. □

12. Домашний экзамен.

Задача 12.1. Пусть P_a – четырехугольник с вершинами в точках $(0,0),(a,0),(1,1),(0,1)$.

(1) Покажите, что P_a определяет полное неособое торическое многообразие.
(2) Постройте для P_a мономы, порождающие эквивариантное проективное вложение, и покажите, что соответствующее торическое многообразие вкладывается в $\mathbb{C}P^5$.
(3) Покажите, что многообразия, соответствующие P_a и P_b, имеют изоморфные кольца когомологий, если и только если числа a и b имеют одинаковую четность.

Задача 12.2. Пусть P – неособый простой выпуклый n-мерный многогранник. Срежем у него одну из вершин. Покажите, что новый многогранник также можно реализовать как неособый многогранник в $\mathbb{R}^n$. (Соответствующее торическое многообразие получается из исходного раздутием соответствующей вершине неподвижной точки действия тора).

Задача 12.3. Вычислите характеристические числа Чженя многообразия $\mathbb{C}P^2$, пользуясь теоремой локализации для действия окружности, заданного формулой $t\cdot[z_0\colon z_1\colon \ldots : z_n]=[z_0\colon tz_1\colon \ldots : t^n z_n]$. (Ответ: $c_1^2=9$, $c_2=3$).

Список литературы

[1] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic classes.* Annals of Mathematics Studies, 76. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1974.
[2] Askold G. Khovanskii. *Newton polyhedra and toric varieties.* Funk. Anal. i Priloz 11 (1977), no. 4, 56–64 (Russian); Funct. Anal. Appl. 11 (1977), no. 4, 289–296 (English translation).
[3] M.F. Atiyah, R. Bott. *The moment map and equivariant cohomology.* Topology vol. 23, Issue 1, 1984, 1–28.
[4] В. И. Арнольд, А. Б. Гивенталь. *Симплектическая геометрия.* Динамические системы – 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 4, ВИНИТИ, М., 1985, 5–135.
[5] Michéle Audin. *The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds.* Progress in Mathematics, 93. Birkhäuser, Basel, 1991.
[6] William Fulton. *Introduction to Toric Varieties.* Annals of Mathematics Studies, 131. The William H. Roever Lectures in Geometry. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
[7] D. McDuff, D.A. Salamon. *Introduction to Symplectic Topology.* Oxford University Press, April 1995. Second Edition, 1998.
[8] Victor M. Buchstaber, Taras E. Panov and Nigel Ray. Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds. Moscow Math. J. 7 (2007), no. 2, 219–242.
[9] David A. Cox, John B. Little, and Henry K. Schenck. *Toric varieties.* Graduate Studies in Mathematics, vol. 124, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
[10] V.M.Buchstaber, T.E. Panov. *Toric Topology.* AMS Math.Surveys and monographs, vol.204, 2015, 518 pp., arXiv:1210.2368.