Сферическая геометрия

▷ Напомним, что *точки* в сферической геометрии — это точки евклидовой сферы в трехмерном пространстве радиуса R; *прямые* — *большие окружности* (сечения сферы плоскостями, проходящими через ее центр); *расстояние* между двумя точками — евклидова длина меньшей из дуг большой окружности, соединяющей эти точки.

Задача 1.1. а) Чему в сферической геометрии равна длина $l(r)$ окружности радиуса r? Больше она или меньше, чем в Евклидовой геометрии?
б) Найдите площадь $s(r)$ сферического круга радиуса r.
(В обоих пунктах стоит проверить, что при $R \to \infty$ ответ превращается в евклидов.)

Задача 1.2. Биссектрисы сферического треугольника пересекаются в одной точке.

Задача 1.3. Медианы сферического треугольника пересекаются в одной точке.

Задача 1.4*. Высоты сферического треугольника пересекаются в одной точке.
(Приведите контрпример, уточните утверждение и докажите его.)

Задача 1.5. а) Для прямоугольного треугольника с катетами a и b и гипотенузой c выполняется *сферическая теорема Пифагора*: при $R = 1$

$$\cos a \cdot \cos b = \cos c.$$

б) Когда стороны треугольника малы по сравнению с радиусом окружности, сферическая теорема Пифагора переходит в обычную.

▷ Для произвольного сферического треугольника можно доказать, что (при $R = 1$)

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \qquad \text{(теорема косинусов);}$$
$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c \qquad \text{(двойственная теорема косинусов).}$$

▷ Сферическому треугольнику сопоставим *полярный* ему сферический треугольник: прямая OA' перпендикулярна плоскости OBC и точки A и A' лежат по одну сторону от прямой BC.

Задача 1.6. а) Выразите стороны и углы полярного треугольника через стороны и углы исходного.
б) Выведите двойственную теорему косинусов из обычной.

Задача 1.7. Сферический четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда

$$\sin\left(\frac{AB}{2R}\right) \cdot \sin\left(\frac{CD}{2R}\right) - \sin\left(\frac{AC}{2R}\right) \cdot \sin\left(\frac{BD}{2R}\right) + \sin\left(\frac{BC}{2R}\right) \cdot \sin\left(\frac{AD}{2R}\right) = 0.$$