

Дробно-линейные преобразования

- ▷ *Инверсия* относительно окружности с центром O и радиусом r — это преобразование $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, при котором точка A переходит в такую точку A' на луче OA , что $OA \cdot OA' = r^2$.

Обобщенная окружность — это прямая (вместе с точкой ∞) или окружность.

Инверсии переводят обобщенные окружности в обобщенные окружности и сохраняют углы (см. задачи 1 и 4).

Задача 2.1. а) Преобразование $z \mapsto 1/\bar{z}$ является инверсией.

б) Любая инверсия может быть записана в виде $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ (где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$).

- ▷ Преобразование вида $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ (где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad-bc \neq 0$) множества $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ называется *дробно-линейным*.

Задача 2.2. Преобразование вида $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ является биекцией тогда и только тогда, когда $ad-bc \neq 0$.

Задача 2.3. Любое дробно-линейное преобразование можно представить в виде композиции аффинных преобразований $z \mapsto az+b$ и преобразований $z \mapsto 1/z$.

Задача 2.4. Комплексные дробно-линейные преобразования а) сохраняют двойное отношение четверок точек; б) переводят обобщенные окружности в обобщенные окружности; в) сохраняют углы между кривыми.

(Угол между двумя кривыми в данной точке — это угол между касательными к ним в этой точке. Если произвольные кривые пугают, можно ограничиться обобщенными окружностями.)

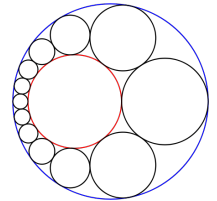
Задача 2.5. а) Дробно-линейным преобразованием любую обобщенную окружность можно перевести в любую («действие группы $PSL_2(\mathbb{C})$ на обобщенных окружностях *транзитивно*»).

б) Дробно-линейным преобразованием любую тройку точек можно перевести в любую («действие группы $PSL_2(\mathbb{C})$ на точках плоскости *3-транзитивно*»).

в) Дробно-линейное преобразование однозначно задается образом трех точек.

Задача 2.6. а) Дробно-линейным преобразованием любую пару вложенных окружностей можно перевести в пару концентрических.

б) Даны две вложенные окружности C и C' . Докажите, что если цепочка окружностей A_1, A_2, \dots , таких что A_{i+1} касается C, C' и A_i , замыкается для некоторого выбора A_1 , то она замыкается и при любом выборе A_1 («поризм Штейнера»).



Задача 2.7. а) Все окружности, проходящие через данную точку и перпендикулярные данной окружности, имеют и еще одну общую точку.

б) Если две точки симметричны относительно обобщенной окружности, то их образы при дробно-линейном преобразовании симметричны относительно ее образа.

Задача 2.8. а) Преобразования вида $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, т. ч. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad-bc > 0$ («группа $PSL_2(\mathbb{R})$ ») сохраняют верхнюю полуплоскость.

б) Любое дробно-линейное преобразование, сохраняющее верхнюю полуплоскость, может быть представлено в таком виде.

- ▷ Эти преобразования суть движения [модели Пуанкаре] геометрии Лобачевского.